Hermann Maier & Fritz Schweiger

Mathematik und Sprache

Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht

Aus der Reihe

MATHEMATIK FÜR SCHULE UND PRAXIS

Herausgegeben von Hans-Christian REICHEL

Inhalt

Vorwort

Es war im August 1992 beim Siebenten Internationalen Kongress über Mathematikunterricht in Québec, als wir den Plan fassten, gemeinsam ein Buch über Mathematik und Sprache zu schreiben. Damals ahnten wir nicht, worauf wir uns eingelassen hatten. Denn obwohl wir mit der Thematik schon vertraut waren, erwies sie sich doch im Laufe weiterer Recherchen als beinahe uferlos. Die vorhandene Literatur ist ein wahrer Dschungel und die für die Fachdidaktik so typische Situation, dass es Querverbindungen zu zahlreichen anderen Wissenschaften gibt, stellte eine schwer zu bewältigende Herausforderung dar. Unsere verschiedenen wissenschaftlichen Erfahrungen und Hintergründe schienen aber doch eine gewisse Gewähr zu bieten, dass wir das Thema breit anlegen konnten. Obwohl die Bibliographie nun gegen 300 Titel umfasst, stellt sie dennoch nur einen Ausschnitt der zu nennenden Literatur dar, und es wird leicht sein, nachzuweisen, dass vieles Wichtige in unserem Buch nicht oder nur ungenügend berücksichtigt wurde.

Vier große Themen haben den Aufbau des Buches bestimmt. Im ersten Kapitel soll vor allem die Besonderheit der mathematischen Fachsprache auf dem Hintergrund sprachwissenschaftlich orientierter Überlegungen dargestellt werden. Das zweite Kapitel versucht die Rolle der Sprache beim Lehren und Lernen von Mathematik zu beschreiben. Dabei geht es vor allem um Sprache als Mittel zur Darstellung von Begriffen und Theorien und um ihre Rolle bei der Lösung von Aufgaben und Problemen. Im dritten Kapitel betrachten wir Sprache als Medium des Unterrichts, als Mittel zur unterrichtlichen Kommunikation. Im vierten Kapitel gehen wir der Frage nach, inwieweit Mathematikunterricht zur Förderung sprachlicher Kompetenz beitragen kann und stellen verschiedene Formen der Sprachförderung vor. Wie schon diese erste Übersicht zeigt, sind diese Themen notwendigerweise eng miteinander verschränkt. Die Zuordnung eines Themas zu einem Kapitel kann daher in vielen Fällen kritisch hinterfragt werden. Auch ließen sich aus diesem Grunde gewisse Wiederholungen nicht ganz vermeiden.

Wir schulden einigen Kollegen Dank, die das Projekt mit Interesse begleitet, vorläufige Fassungen gelesen und uns wertvolle Anregungen zur Überarbeitung und Verbesserung des Manuskripts gegeben haben. Das sind vor allem Gerald Wittmann und Dr. Günter Senftleben aus Regensburg sowie die Mitglieder der Arbeitsgruppe „Mathematik und Sprache“, die sich bei einigen Tagungen, die von Mathematikdidaktikern Österreichs und Ungarns gemeinsam veranstaltet wurden, getroffen hat. Auf die Klage hin, dass man sich mancherorts im Wald allzu spezieller Erörterungen zu verirren drohe und den roten Faden verliere, verwandelten wir einige Abschnitte in Anhänge, so dass der Haupttext entlastet erscheint und sich der speziell Interessierte doch vertieft informieren kann. Auch wurde uns signalisiert, dass man einzelnen Abschnitten deutlich ansehe, welcher der beiden Autoren ihn geschrieben habe. Natürlich haben wir uns in mehreren Durchgängen um eine gewisse Vereinheitlichung des Stiles bemüht; aber warum soll nicht erkennbar sein, dass hier zwei Wissenschaftler, einer im bayerischen Regensburg, einer im österreichischen Salzburg tätig, ein gemeinsames Werk verfasst haben.

Unser Buch verfolgt zumindest zwei Ziele.

- Lehrer und Lehrerbildner sensibel zu machen, dem Thema Mathematik und Sprache im Unterricht erhöhte Aufmerksamkeit zu schenken
- Fachdidaktiker und andere Wissenschaftler zu weiteren Forschungen auf diesem Gebiet anzuregen.

Wenn die Lektüre unseres Buches aber zumindest als interessant angesehen wird, sind wir auch schon sehr zufrieden. Wir sind für jede Art von Rückmeldung dankbar.

Zuletzt soll noch angemerkt werden, dass mit den Bezeichnungen Schüler und Lehrer selbstverständlich, wenn nicht ausdrücklich unterschieden, immer Mädchen und Buben, Frauen und Männer gemeint sind.

Im Sommer 1998 H. Maier & F. Schweiger

Vorwort zur elektronischen Fassung

Die vorliegende elektronische Fassung unterscheidet sich nur unwesentlich von der gedruckten, die 1999 beim Verlag öbv&hpt in der von Hans-Christian Reichel herausgegebenen Reihe Mathematik für Schule und Praxis erschienen ist. Es wurden vor allem Druckfehler beseitigt und der Text an die neue Rechtschreibung angepasst. Die Anhänge wurden unter einem eigenen Link abgelegt: MuS_Anhang.

Es wurde darauf verzichtet, das Werk mit Blick auf neuere Literatur zu überarbeiten. Es ist geplant, über die Veröffentlichungen in der letzten Dekade sowie neuere Ergebnisse zum Thema eine eigene Arbeit zu verfassen.

Im Sommer 2008 H. Maier & F. Schweiger

1. Sprache und Mathematik

1.1 ‘Sprache’ – ‘Sprachen’

Am Beginn von Überlegungen, in denen die vielfältigen Beziehungen zwischen Sprache und Mathematik untersucht werden sollen, muss die Frage stehen: Was ist Sprache?

Eine erste Annäherung an eine Antwort ergibt sich durch einen Verweis auf die verschiedenen Bedeutungen des Wortes *Sprache*, wie sie in den folgenden Sätzen erkennbar sind:

(1) Die Sprache ermöglichte den kulturellen Aufstieg des Menschen.
(2) Viele Europäer meinen, Chinesisch sei eine besonders schwierige Sprache.
(3) Die Sprache von Städtern und Bauern ist oft sehr verschieden.
(4) Alice beachtete die Regeln der am Hofe der Herzkönigin üblichen Sprache nicht.
(5) PASCAL ist eine nützliche Sprache.
(6) Zamenhof hat als Mittel der Verständigung die Sprache Esperanto erfunden.
(7) Die Sprache der Bienen wurde in unserem Jahrhundert entschlüsselt.
(8) Durch die Krankheit verlor der Patient seine Sprache.
(9) Die musikalische Sprache Richard Wagners wurde zu seiner Zeit ebenso bewundert wie abgelehnt.

Im Beispiel (1) bedeutet *Sprache* das dem Menschen eigene Kommunikationssystem Sprache (französisch: *langage*) bzw. die dafür notwendige Sprachfähigkeit des Menschen (französisch: *faculté de langage*). Beispiel (8) weist allerdings darauf hin, dass einzelne Menschen – z. B. durch Erkrankung oder Unfall – dieser grundsätzlich bestehende Sprachfähigkeit in verschiedenem Ausmaß verlustig gehen können. Im Beispiel (2) wird auf die verschiedenen Sprachen der Welt (französisch: *langues*) Bezug genommen, die als spezielle Realisation des Kommunikationsmittels Sprache angesehen werden können. Eine Sprache in diesem Sinn ist ein Kode, in welchem Nachrichten dargestellt werden. Dieser Kode ist das Baumaterial für konkrete Botschaften (französisch: *paroles*), die gesprochene oder geschriebene Texte sein können. In ihnen können dann zusätzlich symbolische, ikonische und bildhafte Elemente auftreten, wie sie für wissenschaftliche Fachsprachen typisch sind. Ein Mensch kann mehrere Sprachen (*langues*) und Erweiterungen dieser Kodes (wie z. B. die Fachsprache der Mathematik) in unterschiedlichem Ausmaß beherrschen: "perfekt", "fließend", "gebrochen", "durch Aphasie gestört",.... Die Erforschung von Sprache (als *langage* oder als *faculté de langage*) und der einzelnen Sprachen (*langues*) beginnt daher mit der Analyse von gesprochenen und geschriebenen Texten. Dabei fällt auf, dass die Sprachen untereinander verschieden sind. Sie klingen anders, es werden andere Wörter verwendet, sie unterscheiden sich in der Grammatik, aber sie funktionieren doch alle ähnlich. Die Bibel lässt sich in alle Sprachen der Welt übersetzen und in allen Sprachen können Menschen einander ihre Zuneigung ausdrücken, aber auch Haß und Abneigung. Portugiesische Zeitungen berichten über Sportereignisse ebenso wie philippinische Zeitungen (etwa in Tagalog). Der Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen kann in Kiswahili oder in Russisch ausgedrückt werden. Satz (3) verweist auf die Gliederung von Sprachen in Dialekte und Regiolekte, Satz (4) auf die verschiedenen Sprachstile innerhalb einer Sprachgemeinschaft. Der „Dialog“ mit einem Computer erfordert eine formale Sprache (Beispiel 5), hingegen wird in (6) mit Esperanto eine künstliche Sprache erwähnt, die einer natürlichen Sprache nachgebildet ist. Inwieweit die Kommunikation unter Tieren eine Sprache genannt werden kann, ist noch Gegenstand der Forschung (Beispiel 7). Satz (9) erinnert schließlich daran, dass auch Ausdrucksformen der Kunst und der Musik als *Sprache* bezeichnet werden. Von den unterschiedlichen Bedeutungen des Wortes *Sprache*, die sich manchmal nur in Nuancen unterscheiden und hier nicht im Einzelnen analysiert werden sollen, macht auch die vorliegende Monographie Gebrauch.

Den vielfältigen Verwendungen des Wortes Sprache entsprechen verschiedene wissenschaftliche Disziplinen.[1] Die deskriptive (oder strukturelle) Sprachwissenschaft beschreibt die verschiedenen Sprachen der Welt. Die vergleichende Sprachwissenschaft hat die Aufgabe, Kontraste und Gemeinsamkeiten dieser Sprachen aufzuzeigen, wobei die historische (oder diachronische) Sprachwissenschaft versucht, die Veränderungen von Sprachen im Lauf der Geschichte zu beschreiben (und ansatzweise zu erklären) bzw. Beziehungen zwischen verschiedenen Sprachen aufzuzeigen, die etwa im Bild von Verwandtschaftsbeziehungen beschrieben werden können (eine Einführung bietet etwa SZEMERÉNYI 1980). So wird Italienisch als Tochtersprache des Lateinischen bezeichnet, da es als eine Fortsetzung des Lateinischen angesehen werden kann. Am deutlichsten ist dies bei der Betrachtung des Wortschatzes zu sehen, wie die nachfolgenden Beispiele belegen:

lat. *octo*	wurde zu	ital. *otto*	"acht"
lat. *minus*	wurde zu	ital. *meno*	"weniger"
lat. *corpus*	wurde zu	ital. *corpo*	"Körper"

Lateinisch wird allerdings nicht Muttersprache des Italienischen genannt, da dieser Ausdruck durch eine andere Bedeutung – nämlich die zuerst erlernte Sprache, die überwiegend die Sprache der Mutter ist – besetzt ist (im Französischen wird letztere *langue maternelle* und erstere – ins Deutsche fast unübersetzbar – *langue mère* genannt).

Innerhalb der vergleichenden Sprachwissenschaft versucht die Sprachtypologie Gemeinsamkeiten in der Organisation der Sprachen zu erforschen, z. B.: Die Besitzrelation kann ausgedrückt werden: durch Adjektive (deutsch *mein Haus*), durch Suffixe (türkisch *ev* 'Haus' : *evim* 'mein Haus') oder durch eine beifügende Konstruktion (japanisch *watashi no uchi*, wörtlich etwa 'ich + *Partikel* + Haus'). Für die Wortstellung innerhalb des Syntagmas Adjektiv und Nomen gibt es zwei Optionen:

- Voranstellung: deutsch *stetige Funktion*
- Nachstellung: franz. *fonction continue*

Es gibt Sprachen, bei denen die eine oder andere Option strikt oder vorzugsweise einzuhalten ist; bei anderen ist "freie Wortstellung" erlaubt (lat. *aurea aetas* 'goldenes Zeitalter', *magister sapiens* 'ein weiser Lehrer'). Dennoch gibt es viele Gemeinsamkeiten natürlicher Sprachen, die es gestatten, auf grundlegende Eigenschaften des Systems Sprache zu schließen, welche Gegenstand der Allgemeinen Sprachwissenschaft ist. Da sich jede Sprache als ein Zeichensystem zur Kodierung von Nachricht auffassen lässt, kann man die Sprachwissenschaft als Teil anderer Wissenschaften ansehen, etwa der Semiotik oder der Kommunikationswissenschaft.

Viele Disziplinen innerhalb und am Rande der Sprachwissenschaft werden heute oft als "Bindestrich-Linguistiken" apostrophiert: Textlinguistik, Psycholinguistik, Soziolinguistik, Neurolinguistik, usw. Diese Bezeichnungen sind zumeist zutreffend und informativ. Die Bedeutung der Angewandten Sprachwissenschaft und der Psycholinguistik für internationale Kommunikation, Handel und Management wird in ULIJN & STROTHER (1995) dargelegt. Im Zentrum der Kognitiven Linguistik steht die Erforschung des Zusammenhangs zwischen der Darstellung und der Verarbeitung sprachlichen Wissens (siehe SCHWARZ 1992). Die Kognitionswissenschaft beschäftigt sich mit der Darstellung mentaler Wissensstrukturen und der Modellierung kognitiver Prozesse, wie Wahrnehmen, Denken und Sprechen. Damit ist die Psychologie eine ihrer wichtigsten Bezugswissenschaften. Anderseits haben Computerwissenschaft (Stichwort 'Künstliche Intelligenz'), mathematische Logik und die Theorie der Automaten und der formalen Sprachen einen starken Einfluss auf die Entwicklung der Kognitionswissenschaft gehabt. Die zentralen Fragen lassen sich kurz wie folgt darstellen:

- Über welches Wissen verfügt der Mensch, wenn er so komplexe Leistungen wie Denken und Sprechen ausführen kann?

[1] Von den zahlreichen einführenden Werken zur Sprachwissenschaft seien stellvertretend für viele genannt: BOLINGER & SEARS (1981³), COSERIU 1988, GREWENDORF & HAMM & STERNEFELD 1991[5], LANGACKER 1973², MARTINET 1970 und VATER 1994).

– Wie ist dieses Wissen im Gedächtnis organisiert und repräsentiert?
– Welche kognitiven Prozesse laufen bei der Anwendung dieses Wissens ab?

Schon diese Fragen zeigen, dass es Querverbindungen zur Neurobiologie (Frage nach der physiologischen Grundlage dieser Prozesse) und zur Philosophie (insbesondere zur Erkenntnistheorie) gibt.
Die Entwicklung der Sprachwissenschaft stellt ein interessantes Gebiet der Kulturgeschichte dar, welches Querverbindungen zu Mathematik, Philosophie und Theologie aufweist (siehe dazu vor allem COSERIU 1988).

Den verschiedenen Teilbereichen der Sprachwissenschaft entsprechen verschiedene Beziehungen zwischen Mathematik (bzw. Mathematikunterricht) und Sprache. Mathematik kann als Erweiterung der menschlichen Sprache (als System) angesehen werden. Mathematisches Wissen wird in einem gemischten System, einer oft durch Symbole und Ikone angereicherten *langue* kodiert und vermittelt. Dabei spielt das als Fachsprache der Mathematik bezeichnete Register eine zentrale Rolle, aber nicht die alleinige, da ja Lehrer und vor allem Schüler mathematische Sachverhalte auch in einer vom Standard der Fachsprache abweichenden Sprache ausdrücken. HALLIDAY gibt folgende Umschreibung für ein Register (einer Fach- oder Sondersprache):

“A register is a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings. We can refer to a „mathematics register“ in the sense of meanings that belong to the language of mathematics (the mathematical use of natural language, that is: not mathematics itself), and that a language must express if it is used for mathematical purposes“. (HALLIDAY 1974, S. 65; siehe auch HALLIDAY 1978)

Der Gebrauch eines solchen mathematischen Jargons ist auch unter Fachleuten üblich und erfüllt eine wichtige kommunikative Funktion. Diese umgangssprachliche Variante der Fachsprache ist nicht das, was etwa D'AMORE & SANDRI (1996) als "Mathematischen Jargon" bezeichnet; dort wird mit diesem Wort eine die Fachsprache imitierende Sprachform bezeichnet, die den Eindruck mathematischer Kompetenz erwecken soll. WELLS (1997) hat dazu ein interessantes Werk *A Handbook of mathematical Discourse* verfasst, dessen Zielsetzung er so beschreibt: „This handbook is an intensive description of many aspects of the vocabulary and forms of the English language used to communicate mathematics“. Zielgruppe sind vor allem Studenten und Mathematiker in Forschung und Lehre.

In der Sprachwissenschaft unterscheidet man üblicherweise verschiedene Untersuchungsebenen der sprachlichen Struktur: Phonologie, Morphologie, Lexikon, Syntax, Semantik und Pragmatik (wobei diese Einteilung je nach theoretischem Vorverständnis variieren mag). Offensichtlich hat die gesprochene Mathematik den Sprachen keine neuen Laute oder Lautkombinationen hinzugefügt. Ausnahmen bilden durch Lehnwörter von einer Sprache in eine andere Sprache übernommene Laute oder Lautkombinationen, wie dies bei vielen deutschen Lehnwörtern aus dem Englischen der Fall ist, wie zum Beispiel das Auftreten der Lautkombination /pju/ im Wort *Computer*, die es im Deutschen nur in Lehnwörtern gibt.

Auch die Morphologie der mathematischen Fachsprache weicht von der Morphologie der die Fachsprache „umgebenden“ Sprache nicht ab. Anders ausgedrückt: die Bildung grammatischer Formen erfolgt nach den üblichen Regeln. Für den Unterricht ist es natürlich wichtig, die „korrekten“ Pluralformen (wie *Prisma*: *Prismen*, *Matrix*: *Matrizen* - früher *Matrices* usw.) oder das grammatische Geschlecht (wie etwa *das Tetraeder*) der Fachausdrücke in die Lehre mit einbeziehen. Einen Zwischenbereich zwischen Morphologie und Vokabular stellt das Thema der Wortbildung durch Verwendung von Affixen dar. In der mathematischen Fachsprache gibt es einige Präfixe, wie *ko-* (*Sinus* > *Kosinus*), *hyper-* (*reell* > *hyperreell*) und *sub-* (*additiv* > *subadditiv*). Das Präfix *ko-* ist aus einer Abkürzung von *Komplement* (nämlich lat. *cosinus* = *complementi sinus* ‘Sinus des komplementären Winkels’) hergeleitet. Aber es gibt keine Suffixe, die für die mathematische Fachsprache typisch wären. Häufig ist sicher das Suffix *-ieren* (wie bei *Differenz* > *differenzieren*, ...). Nicht in allen Fällen liegt aber eine Ableitung vor, so ist *addieren* von keinem Wort **Add* abgeleitet![2] Anders ist es bekanntlich in der Fachsprache der Chemie, wo es eine Fülle bedeutungstragender Affixe (Präfixe wie *cis*-, *trans*-, *ortho*-) und vor allem viele Suffixe gibt. Man denke etwa an die Reihen *Sulfat*, *Sulfid*, *Sulfit* oder *Äthan*, *Äthanol*, *Äthyl*-, ...

Die Kapitel Phonologie und Morphologie der mathematischen Sprache sind erwartungsgemäß nicht besonders ergiebig. Anders liegt der Sachverhalt bei den anderen Themen sprachlicher Analyse und darauf wird in den folgenden Kapiteln eingegangen werden.

1.1.1 Zur Entstehung der Sprache

Die Sprache des Menschen ist ein in seiner Art wohl einzigartiges Phänomen. Soweit uns bekannt ist, verfügen Tiere über Kommunikationssysteme, aber diese Systeme erreichen nicht die großen Ausdrucksmöglichkeiten, wie sie der menschlichen Sprache (der „faculté de langage“) eigen ist. So gesehen ist es besonders merkwürdig, dass die menschliche Sprache in so verschiedener Weise realisiert ist, in den Sprachen („langues“) der Menschen, die sich ja nicht nur im Wortschatz (engl. *dog* = frz. *chien* = türkisch *köpek* ‘Hund’), sondern auch in der Struktur (Morphologie, Syntax und Semantik) stark unterscheiden. Es ist daher nicht verwunderlich, dass schon im Altertum die Frage nach dem Ursprung der Sprache gestellt wurde und seither eine immense Literatur zu dieser Frage entstanden ist. Die Frage, welche Sprache denn nun die älteste Sprache sei, ist nach heutigen Erkenntnissen über das Alter der Menschheit sicher als nicht beantwortbar, ja vielleicht nicht einmal als vernünftig gestellt anzusehen; denn vermutlich hat sich die Sprache über viele Zwischenstufen, parallel zum Umbau des Lautbildungsapparates (Stimmbänder, Rachen, Zunge usw.) und zur Entwicklung des Gehirns allmählich entwickelt. Auch die Frage, wie und wann es zur Aufspaltung in verschiedene Sprachen gekommen ist, lässt sich nicht beantworten. Tatsache ist aber, dass die Aufspaltung einer Sprache in mehrere Sprachen ein offenbar häufig auftretendes Ereignis ist, welches sich auch in relativ kurzen Zeiträumen abspielen kann, wie sich etwa an der Entstehung der heutigen romanischen Sprachen aus dem Lateinischen in einem Zeitraum von weniger als 2000 Jahren beobachten lässt. Es ist ein Hauptanliegen der historischen Sprachwissenschaft, die Sprachen der Menschen so in Familien anzuordnen, dass eine genetische Zusammengehörigkeit sichtbar wird, d. h. die Aufspaltung einer meist nur noch in Fragmenten zu rekonstruierenden älteren Sprache die wahrscheinlichste Erklärung für die als gemeinsam oder ähnlich angesehenen Merkmale der dazugehörenden Sprachen zu sein scheint.

Herder hat in seiner 1772 veröffentlichten „Abhandlung über den Ursprung der Sprache“ mit einem Satz auch das heute noch sinnvolle Problem charakterisiert. „Bau und Grundriss, ja selbst der ganze Grundstein dieses Palastes verrät Menschheit“ (zitiert nach KUCKENBURG 1989, S. 18). Damit verweist er darauf, dass die Erforschung von Bau und Organisation der Sprachorgane und vor allem des Gehirns für die Funktionsweise der Sprache den wichtigsten Beitrag leisten könnten. Die heutige Sprachwissenschaft legt überzeugend dar, dass alle bisher bekannten Sprachen in ihren Grundzügen eine vergleichbar hohe Organisationsform aufweisen und selbst die kühnsten Rekonstruktionen bestenfalls eine Handvoll von Wortformen mit dem bescheidenen Alter von vielleicht 6000 bis 7000 Jahren erbringen können. Danach sind alle bisher vorgetragenen Theorien zur Entstehung der menschlichen Sprache bloße Spekulationen. Denn Kinder erlernen eine Sprache dadurch, dass sie in einer sprachlichen Umgebung aufwachsen, d. h. wiederholt sprachlichen Signalen ausgesetzt sind. Daher ist es auch fraglich, ob man aus dem Spracherwerb im Kindesalter sehr viel über die Entstehung der Sprache vor vielen Tausenden von Jahren erfahren kann.

---

2 Sehr häufig wird in der Sprachwissenschaft auch ein hochgestellter Stern, das Zeichen * verwendet. Es hat zwei verschiedene Bedeutungen. In der historischen Sprachwissenschaft bezeichnet es eine Wortform, die rekonstruiert wurde, d. h. deren Aussehen aus verschiedenen Argumenten erschlossen werden kann, die aber nicht belegt ist (d. h. in keinem uns erhaltenen Text zu finden ist). Anderseits werden mit dem Stern Wortformen oder Sätze bezeichnet, die „ungrammatisch“ sind, wie zum Beispiel **Hünder* als Mehrzahl zu *Hund* (was nach dem Vorbild *Münder* zu *Mund* nicht völlig ausgeschlossen erscheint) oder ein Satz wie **das Kind gehen zur Schule*.

Menschen verschiedener Muttersprachen können im Bedarfsfall eine gemeinsame Sprache entwickeln, die eine Pidginsprache genannt wird. Dies geschah in den Kolonialzeiten oft durch Sklaverei oder Vernichtung und Vertreibung indigener Völker. In manchen Fällen wurde eine Pidginsprache zur Muttersprache einer neuen Generation; man spricht dann von einer Kreolsprache. Kreolsprachen haben zahlreiche Gemeinsamkeiten, die erneut auf eine allen Sprachen zugrunde liegen Struktur hinweisen, die möglicherweise in der neurophysiologischen Ausstattung des Menschen begründet ist (zu diesem Thema siehe etwa BICKERTON 1981 und LENNEBERG 1967).

Jedenfalls ist die Evolution des Menschen ein biologischer und ein kultureller Prozess, in welchem die Sprache zusehends an Bedeutung gewann. Sehr oft wird die Entwicklung der Sprache mit der Entwicklung der Werkzeuge in Verbindung gebracht. Der französische Prähistoriker LEROI-GOURHAN schreibt etwa „Sprache ist von dem Augenblick möglich, da die Vorgeschichte Werkzeuge liefert, denn Werkzeug und Sprache sind neurologisch miteinander verbunden“ (LEROI-GOURHAN 1980, S. 149). Da diese Ansichten auf gewissen Ähnlichkeiten zwischen der Herstellung von Werkzeugen und der Syntax einer Sprache basieren, kann man die Frage stellen, inwieweit der algorithmische Aspekt der Mathematik derselben kognitiven Struktur entspringt.

1.1.2 Zu den Funktionen der Sprache

Die Sprache des Menschen hat eine zumindest doppelte Funktion: eine kommunikative und eine kognitive Funktion. Die kommunikative Funktion dient der Verständigung, die kognitive Funktion dient dem Erkenntnisgewinn (KLIX 1995). Beide Funktionen hängen, wie gerade an der Verwendung der Sprache in der Mathematik deutlich zu sehen ist, eng zusammen. Die Sätze *Bezeichnen wir in einem rechtwinkeligen Dreieck die Längen der Katheten mit a und mit b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt* $a^2 + b^2 = c^2$. *Sind a, b und c teilerfremde natürliche Zahlen (wobei man annehmen kann, dass a eine gerade Zahl ist), so gibt es ganze Zahlen u und v, so dass die Formeln* $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, $c = u^2 + v^2$ *gelten.* sind sprachliche Mitteilungen, die gesprochen oder geschrieben werden können, wobei der erste Teil durch eine Zeichnung unterstützt werden kann. Die kognitive Leistung der Sprache ist durch das Schaffen von Begriffen wie DREIECK, RECHTWINKELIG, KATHETE, GANZE ZAHL, TEILERFREMD, ... erkennbar[3]. Deutlich wird auch die Verdichtung der Information durch die mathematische Symbolsprache (der Verwendung von Variablen, Relationen und Operatoren), die im geschriebenen Text besonders hervortritt.

Die kognitive Funktion dient dem Erkenntnisgewinn. Dieser geschieht durch Verdichtung des Informationstransports durch begriffliche Repräsentation. Die Aussage *Die Drehungen um einen festen Punkt bilden eine Gruppe* enthält im Begriff GRUPPE zahlreiche Informationen, wie die Zusammensetzbarkeit von Drehungen, deren Assoziativität, die Existenz inverser Drehungen usw. Neue Wissensbereiche können so fixiert und begrifflich durchdrungen werden. Die Benennung von Strategien und Techniken macht sie leichter aufrufbar und verfügbar. *Zählen*, *addieren*, *multiplizieren*, *differenzieren*, *integrieren* usw. sind Wörter der deutschen Sprache, die der Mensch im Verlauf der Evolution der Mathematik für verfügbare Techniken gefunden hat. Die Ergebnisse individuellen Denkens werden durch Benennung mitteilbar und damit vervielfältigt. Die kommunikative Funktion hat somit einen Verstärkungseffekt auf die kognitive Funktion. Die kognitive Funktion der Sprache verweist auf zwei Probleme, auf den Zusammenhang zwischen Begriff (*signifié*) und Zeichen (*signifiant*) und auf den Zusammenhang zwischen Sprache und Denken. Es ist zunächst die kognitive Funktion der Sprache, die in der Aussage *Mathematik ist eine Sprache* anvisiert ist. Ein viel zitiertes Wort in dieser Richtung findet sich im *Saggiatore* von G. GALILEI:

---

[3] Es sei daran erinnert, dass Wörter und Sätze bzw. Satzteile, über die im Text gesprochen wird, kursiv und Begriffsbezeichnungen in Kapitälchen gesetzt sind.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche,...." (GALILEI 1623, p. 631).	Die Philosophie ist in dem großartigen Buche niedergeschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt (ich meine das Universum). Aber man kann es erst lesen, wenn man die *Sprache* erlernt und sich die Zeichen vertraut macht, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren..."

Dieser Gedanke wird auch von HEISENBERG aufgegriffen:
"Im Grunde war ich mit meiner Freude an der mathematischen Beschreibung der Natur ..... auf den einen Grundzug des abendländischen Denkens überhaupt gestoßen, nämlich eben auf die .... Verbindung der prinzipiellen Fragestellung mit dem praktischen Handeln. Die Mathematik ist sozusagen die Sprache, in der die Frage gestellt und beantwortet werden kann, aber die Frage selbst zielt auf einen Vorgang in der praktischen materiellen Welt; die Geometrie zum Beispiel diente der Vermessung von Ackerland." (HEISENBERG 1955, p.40).

Dieses Zitat verweist auch auf die kommunikative Funktion der Mathematik. Die Aussage, Mathematik ist eine Sprache, in welcher man „mit der Natur sprechen“ kann, ist gewiss metaphorisch zu verstehen. Aber die Aussage, Mathematik ist eine Sprache, in welcher man „mit anderen Menschen über die Natur sprechen“ kann, beschreibt die Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften wohl zutreffend. Gewiss ist sie nicht die einzige Sprache, in der über die Natur gesprochen werden kann, wie Poesie und Musik bezeugen.

COSERIU 1988 unterscheidet in der Sprache drei Ebenen, die er die universelle, die historische und die individuelle Ebene nennt. Er schreibt (loc. cit. p. 250): "Die Sprache ist eine universelle menschliche Tätigkeit, die zwar individuell verwirklicht wird, aber stets nach historisch bestimmten Techniken (»Sprachen«)“.

Man erkennt unschwer die Ähnlichkeit bzw. Entsprechung mit den in der Einleitung verwendeten Begriffen:

– Sprache als universelle menschliche Tätigkeit: *langage,*
– Sprache, die in einer historisch bestimmten Technik vorliegt: *langue,*
– Sprache, die individuell verwirklicht wird: *parole*.

Nach *W. von Humboldt* (siehe COSERIU 1988, S. 253 - 254) kann man diese drei Ebenen noch nach drei Gesichtspunkten unterteilen, nämlich Sprache auffassen als (kreative) Tätigkeit (ενεργεια), als (erlernte) Technik (δυναμις) und als Produkt (εργον). Dieser Sachverhalt lässt sich in einer Matrix so darstellen:

	Tätigkeit	**Technik**	**Produkt**
universell	Sprechen/ Schreiben	Sprechen können/ Schreiben können	Gesprochenes/ Geschriebenes
historisch	konkrete Sprache	sprachliches Wissen einer Sprachgemeinschaft	----------
individuell	Diskurs (Sprechakt)	sprachliches Wissen eines Sprechers	gesprochener/ geschriebener Text

Die folgende Szene mag die drei Ebenen veranschaulichen:
Alice A. besucht Ihre Freundin Elfi S. Durch das Wohnzimmer huscht Prisca, die erst vor kurzem das Gehen gelernt hat. "Prisca ist jetzt rasch gewachsen", wundert sich Alice. "Ja, und sie *spricht* schon", verkündet Elfi nicht ohne Mutterstolz. Da läutet das Telefon. Elfi läuft schnell in die Küche und *spricht* dann recht lange. "Das war meine große Tochter Teresa", sagt Elfi, als sie zum Teetisch zurückkehrt. "Sie studiert jetzt in Budapest und

spricht auch schon Ungarisch". Es fällt nicht schwer, in der dreimaligen Verwendung von "[sie] spricht" die drei genannten Ebenen (universelle, individuelle, historische Ebene) aufzufinden.

1.2. Mathematik als Sprache

1.2.1 Bilder von Mathematik

Wenn es darum geht, Zusammenhänge zwischen Mathematik bzw. Mathematikunterricht und Sprache aufzuzeigen, ist neben der Frage *Was ist Sprache?* auch die Frage *Was ist Mathematik?* unvermeidbar. Allerdings kann auf diese Frage hier nur ansatzweise eingegangen werden. Antworten können in der Wissenschaftstheorie, aus der Geschichte der Mathematik und in zahlreichen biographischen und vor allem autobiographischen Zeugnissen gefunden werden, aber der eigenen Erfahrung mit Mathematik kommt ein besonders hoher Stellenwert zu. Man kann annehmen, dass jeder Mathematiker, jeder Mathematikdidaktiker und jeder Mathematiklehrer (gemeint sind stets Frauen und Männer) ein gewisses Bild von Mathematik haben. Diese durchaus individuellen Vorstellungen müssen einiges gemeinsam haben; denn sonst wäre ein Sprechen über Mathematik nicht möglich. Auch den Schülern sollte im Mathematikunterricht ein angemessenes Bild von Mathematik vermittelt werden, so dass eine Diskussion über die Bedeutsamkeit der Mathematik für Kultur und Gesellschaft möglich ist. Über Literatur und Musik, über Sport und Gesundheit, über Wirtschaft und Politik sprechen zu können, wird von vielen als ein Hinweis auf Bildung verstanden. Mathematik, Physik und Chemie spielen in solchen Gesprächen eine eher untergeordnete Rolle. Es ist eine große Herausforderung an die Mathematikdidaktik, diesen Befund zu verändern.

Nach HERSH (1995) sollte eine philosophische Betrachtung der Mathematik etwa folgende Fragen beantworten:

1. Wovon handelt Mathematik?
2. Was unterscheidet Mathematik von anderen Wissenschaften?
3. Warum gibt es in der Mathematik in vieler Hinsicht eine fast universale Übereinstimmung?
4. Warum sind mathematische Resultate unabhängig von Zeit, Ort, Rasse, Nationalität und Geschlecht, obwohl auch Mathematik ein gesellschaftliches Phänomen ist?
5. Existiert das Unendliche? Wenn ja, auf welche Weise?
6. Warum erweist sich reine Mathematik so oft als nützlich, d. h. anwendbar?

Wie erwirbt man mathematisches Wissen?

Unsere Sicht der Mathematik versucht, Mathematik als ein weites Feld menschlicher Tätigkeit zu sehen, wie es auch die Bewegung der Ethnomathematik nahelegt (siehe dazu D'AMBROSIO 1995, 1996 sowie den Abschnitt Mathematik in allen Sprachen): Mathematik ist eine grundlegende Fähigkeit des Menschen. Sie beginnt sich in Tätigkeiten zu entfalten, die manche noch als "vormathematisch" ansprechen mögen: Zählen und Ordnen, Erkennen und Erzeugen von Mustern und Symmetrien, Verwendung von rekursiven Verfahren (eng mit dem Zählprozeß verbunden) und Ausführen von Algorithmen (vergleichbar mit wiederholten Handlungen in Arbeitsprozessen wie Weben, Knüpfen, Pflügen, usw.). Zu nennen ist auch die Herstellung und Verwendung von Modellen (was tief in den Sakralbereich hinein weisen mag): das Einritzen der erhofften Jagdbeute in die Höhlenwand, die Herstellung von Fruchtbarkeitsidolen und anderes mehr. All diese Fähigkeiten sind weltweit und aus der Geschichte der Menschheit bezeugt (siehe dazu WATSON 1990, die auch eine Beziehung des Mathematischen zum Ästhetischen sichtbar macht).

Mathematik ist - wie wohlbekannt - mit Logik verbunden. Logisches Denken kann als Abstraktion ursächlicher und zeitlicher Beziehungen angesehen werden: *Wenn die Sonne scheint, wird es wieder warm*. Uralt sind die Fragen der Menschheit: Warum gibt es Mann und Frau? Warum müssen wir sterben? Woher kommen Krankheit und Sünde? Die mythischen Erzählungen mussten helfen, den Lebenskampf in einer oft auch feindlichen Umgebung zu bestehen. Sehr früh beobachtete der Mensch den Lauf der Jahreszeiten, den Auf- und Untergang von

Sonne, Mond und Sternen, den Zug der Vögel, das Blühen und Reifen von Früchten, ... Es entstanden Kalender. Die Syntax ursächlicher und zeitlicher Beziehungen ist auch die Syntax der mathematischen Schlussfolgerung: *Wenn das Quadrat einer Zahl durch 2 teilbar ist, so ist die Zahl durch 2 teilbar. Wenn ein Dreieck die Seitenlängen 3,4 und 5 besitzt, so hat es einen rechten Winkel.* Auf diese Zusammenhänge wird im Kapitel Mathematische Fachsprache (Abschnitt über Konjunktionen) nochmals eingegangen.

Zu erwähnen sind auch Arbeiten, in welchen Mathematik bzw. die Sprache der Mathematik aus der Sicht der Semiotik untersuchen. ROTMAN (1988) skizziert ein semiotisches Modell der Mathematik, in welchem vor allem die Bedeutung des Beweises untersucht wird. Ein Beweis ist zunächst eine Kette von Implikationen, die einen ‘Mathematiker’ in der ‘fiktiven Welt eines Gedankenexperimentes’ überzeugt. Darüber hinaus ist es aber wichtig, die ‘Idee hinter dem Beweis’ zu verstehen. Zu nennen ist auch SIMEONOV 1996, der ebenfalls versucht, eine universelle Sicht von Mathematik zu beschreiben: „Die Semiotik behandelt Mathematik als Kommunikation“ (S. 415).

1.2.2 Zu sprachlichen Merkmalen der Mathematik

a) Mathematische Aussagen und ihre Verknüpfung

Eine wichtige Rolle in der sprachlichen Gestalt der Mathematik spielen nach dem Prinzip einer zweiwertigen Logik entscheidbare Aussagen und Aussagenverknüpfungen. Was ist damit gemeint?

In der Schulbuchaufgabe *Ein kreisrundes Schwimmbecken hat einen Durchmesser von 3,80 m und eine Höhe von 90 cm. Wie viel m^3 Wasser sind zur vollständigen Füllung notwendig?* ist nur der erste Satz eine <u>Aussage.</u> (Er beschreibt die Situation.) Der zweite Satz ist eine Frage. Auch der Satz *Für Prismen gilt die Volumenformel* $V = G \cdot h$ ist eine Aussage. In der Aufgabe *Wie schwer ist eine Rolle Kupferdraht, wenn der Draht 5 mm dick und 500 m lang ist? Dichte von Kupfer: 8,9 g/cm³. Schätze das Ergebnis zuerst!* ist der erste Satz eine Frage, in der im Nebensatz eine Aussage über die gegebene Situation verpackt ist. Dann folgt eine weitere Aussage und letztlich eine Aufforderung, ein ‘Befehl’.

Zunächst sind also Aussagen Sätze (im grammatikalischen Sinne), durch die "etwas behauptet" wird. Im Unterschied zu Fragen, Bitten, Befehlen und Ausrufen ist es in ihrem Fall sinnvoll, die Frage nach der "Wahrheit" zu stellen. Um auszudrücken, inwieweit die in Aussagen formulierten Behauptungen zutreffen, ordnet man jeder von ihnen einen Wahrheitswert zu. In der Alltagssprache benutzt man dabei Formulierungen wie "richtig", "wahr", "teilweise richtig", "in manchen Fällen wahr", "unter bestimmten Umständen wahr", "meistens falsch", "falsch", usw. Gemäß der auf Aristoteles zurückgehenden klassischen Logik wird in der Mathematik hinsichtlich des Wahrheitswerts von Aussagen ein Zweiwertigkeitsprinzip zugrunde gelegt. Danach sollte eine Aussage entweder wahr oder falsch sein. Die Zuweisung verschiedener Wahrheitswerte an die gleiche Aussage gilt als Widerspruch. Dieses Prinzip stellt eine einschneidende Normierung der Wahrheitswerte dar, mit der sich die mathematische Sprache eine bewusste Beschränkung auferlegt, und aus der sich weitreichende Konsequenzen ergeben. In vielen außermathematischen Situationen kann man mit dem rigorosen Standpunkt "entweder wahr oder falsch" der Struktur des betroffenen Gegenstandes nicht gerecht werden.

Die einfachste Form von Aussagen stellen die elementaren oder primitiven Aussagen dar. Beispiele: *10 ist eine gerade Zahl. 10 liegt zwischen 11 und 100.* $13 + 7 = 20$. $8 < 12$. *ABC ist ein rechtwinkeliges Dreieck. g ist parallel zu h.* Sie lassen sich in zwei Bestandteile zerlegen, die mit den Bezeichnungen ‘Subjekt’ und ‘Prädikat’ benannt werden. (Dabei ist die Bedeutung dieser Bezeichnungen in der mathematischen Logik allerdings etwas anders festgelegt als in der Sprachwissenschaft). Subjekte oder Individuen im Sinne der mathematischen Logik sind Namen für Dinge oder für Gattungen (Mengen und Klassen). In den Beispielen findet man die Subjekte 10, 11, 100, 13, 7, 20, 8, 12, ABC, g und h. Prädikate sind (formal gesehen) dann jene Aussagenteile, die durch

Hinzufügen eines oder mehrerer Subjekte zu sinnvollen Sprachgebilden werden. Stark vereinfacht ausgedrückt: Prädikate erhält man, wenn man aus elementaren Aussagen Subjekte entfernt.

Die so entstehenden Leerstellen sind für die betreffenden Prädikate charakteristisch. Enthält eine Aussage n Subjekte, so besitzt das zugehörige Prädikat n Leerstellen und heißt n-stelliges Prädikat. Beispiele für Prädikate sind: "... ist ein rechtwinkeliges Dreieck" (einstellig), "...<..." (zweistellig), "...ist parallel zu..." (zweistellig)", ... liegt zwischen ... und ..." (dreistellig), "...+...=..." (dreistellig). Einstellige Prädikate werden auch Eigenschaften der zugehörigen Subjekte genannt. Mehrstellige Prädikate heißen Relationen. Sie beschreiben Beziehungen zwischen zwei oder mehreren Subjekten. Aus systematischen Gründen kann man aber einstellige Prädikate (Eigenschaften) als einstellige Relationen auffassen.

Subjekte einer Aussage lassen sich durch Variablen (die für ein gedachtes oder gesuchtes Subjekt der Definitionsmenge des Prädikates stehen) ersetzen. Man spricht dann auch von einer Aussageform. Eine Aussageform mit den Variablen x_1, x_2, ... x_n und dem n-stelligen Prädikat P wird meist in folgender Gestalt notiert:

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \in P \quad \text{oder} \quad P\,(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Aussageformen enthalten in der Regel Variablen, aber nicht alle Syntagmen, in denen Variablen vorkommen, sind Aussageformen. In vielen Fällen ist eine Belegung der Variablen nicht mehr möglich. Man sagt dann, die Variablen seien nicht mehr frei, sondern gebunden. Gebundene Variablen ergeben in Verbindung mit den Sprachelementen, in die sie eingebettet sind, bereits sinnvolle Sprachgebilde, deren Wahrheitswert sich entscheiden lässt oder die bereits mathematische Objekte darstellen. Beispiele sind Aussageformen in Verbindung mit Quantoren, z. B. *Für alle reellen Zahlen a und b gilt* $a + b = b + a$. (Kommutativgesetz) oder *Es gibt (genau) eine gerade Primzahl* und Aussageformen zur Mengenbeschreibung, z. B. $\{x \mid x^2 + 3x - 7 > 5\}$. Freie Variablen hingegen sind mit Lücken in einem Fragebogen vergleichbar, die, falls entsprechend ausgefüllt, zusammen mit dem Text des Vordrucks sinnvolle Aussagen bilden. Freie Variablen werden auch Leerstellen, Parameter, Veränderliche oder Unbekannte genannt. Die Variablen spielen in der mathematischen Fachsprache eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich strukturelle Gedankengänge bündeln und in allgemeinen Formulierungen zusammenfassen. Möglicherweise könnte man auch auf sie verzichten; und in der Geschichte der Mathematik musste man auch lange Zeit ohne sie auskommen. Die mathematische Ausdrucksweise gestaltet sich allerdings dann in vielen Fällen unökonomisch, schwerfällig, kompliziert und unübersichtlich.

Um den Geltungsbereich und damit den Wahrheitswert (elementarer) Aussageformen bzw. Aussagen genau festlegen zu können, werden sie mit Quantoren verbunden. Das sind Ausdrücke wie $\exists$ (*ein*) bzw. $\forall$ (*alle*), *einige*, *kein(e)*, *mindestens ein*, *höchstens ein*. Beispiele: *Es gibt unendlich viele Primzahlen. Jede natürliche Zahl lässt sich (bzw. alle natürlichen Zahlen lassen sich) in Primfaktoren zerlegen. Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt geht höchstens eine Gerade, die zu ihr parallel ist.* Quantoren werden sprachlich meist durch indefinite Pronomina (*jede* reelle Zahl, für (*irgend*)*eine* (noch zu bestimmende) Konstante, ...) oder durch Adverbien (*überall* stetig, *mindestens eine* Nullstelle, ...) ausgedrückt. Ihr Fehlen – in der Alltagssprache werden sie oft nur implizit zum Ausdruck gebracht – kann die Entscheidung des Wahrheitswerts von Aussagen erschweren.

Elementare Aussagen bzw. Aussageformen können mit $\neg$ (*nicht*) verneint bzw. mit $\wedge$ (*und*), $\vee$ (*oder*), $\Rightarrow$ (*wenn...dann*), $\Leftrightarrow$ (*genau dann, wenn; dann und nur dann, wenn*), *weder...noch*, usw. verknüpft werden. (Solche Verknüpfungen können sich auch in Beziehungssymbolen verbergen. So ist $a \leq b$ eine Abkürzung für $a < b \vee a = b$. Aber umgekehrt kann $a < b$ als Abkürzung für $a \leq b \wedge a \neq b$ stehen.) Die genannten Verknüpfungswörter heißen Junktoren und sind geeignet, aus elementaren komplexere, zusammengesetzte Aussagen (bzw. Aussageformen) zu bilden. Beispiele: *Es ist nicht richtig, dass* $2 \cdot 2 = 5$ *ist. Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann ist es auch gleichschenkelig. Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. 12 ist durch 3 oder durch 4 teilbar.* Auch die Junktoren werden – im Gegensatz zur Alltagssprache – in

der mathematischen Fachsprache explizit gebraucht und es wird für sie festgelegt, welcher Wahrheitswert ihnen in Abhängigkeit vom Wahrheitswert der Elementaraussagen zukommt, die durch sie verknüpft werden.
Es sei angemerkt, dass man unterscheiden kann zwischen Subjunktion (der Verknüpfung, die der *wenn ... dann*-Beziehung entspricht, abgekürzt mit dem Zeichen $\rightarrow$) und Implikation (einer Beziehung der Gestalt *wenn a wahr ist, so ist b wahr*, abgekürzt mit $\Rightarrow$ oder einem anderen Zeichen). Die Subjunktion bezeichnet dann eine logische Verknüpfung, d. h. eine algebraische Operation auf einer Menge von Aussagen, deren Wahrheitswert durch eine Tabelle festgelegt werden kann (siehe Abschnitt Zum Beweisen mathematischer Sätze). Die Implikation ist eine Aussage über die Gültigkeit zweier Aussagen: Man sagt A $\Rightarrow$ B, wenn A wahr ist und A $\rightarrow$ B wahr ist. Eine analoge Unterscheidung kann auch zwischen Bijunktion und Äquivalenz getroffen werden. Für Einzelheiten muss auf Lehrbücher der mathematischen Logik verwiesen werden.

b) Zum Definieren und Verwenden mathematischer Begriffe

Die mathematische Fachsprache ist vor allem dann bedeutsam, wenn es gilt, den Wahrheitswert mathematischer Aussagen zu entscheiden bzw. entscheidbar zu machen. Es bedarf dazu zweierlei: einer genaueren Festlegung der Objekte, Handlungen und Beziehungen, von denen die Texte sprechen, und eines geordneten Verfahrens der Argumentation zugunsten eines bestimmten Wahrheitswerts für die einzelnen Aussagen im Text. Ersteres wird in einer speziellen Form des Definierens geleistet, letzteres mittels besonderer Regeln des Beweisens.

Mathematische Texte bemühen sich, alle Objekte, Handlungen und Beziehungen, von denen in ihnen die Rede ist, nach Umfang und Inhalt eindeutig zu bestimmen. Es werden also Begriffe gebildet, für die genau festgelegt ist, welche Objekte, Handlungen oder Beziehungen zu ihnen gehören und welche nicht (Determinierung). Um dies zu gewährleisten, sollte im Idealfall die Definition von Begriffen nicht implizit mittels des Kontexts, in dem sie gebraucht werden, und auch nicht durch Verweis auf reale Erscheinungen, also empirisch, sondern theoretisch und ausschließlich durch sprachliche Explikation erfolgen. Es gibt verschiedene Formen des Definierens. Bei einer Realdefinition wird die einem Ausdruck oder einem Symbol zugeordnete Bedeutung durch Angabe eines als bekannt vorausgesetzten Oberbegriffs und der spezifizierenden Merkmale sprachlich fixiert. Beispiel: *Ein Dreieck ABC ist eine Fläche, die durch einen (geschlossenen) Streckenzug ABCA und die im Innern dieses Streckenzugs gelegenen Punkte gebildet wird.* Vielfach werden aber die Begriffe charakterisierend beschrieben. Beispiele: *Für die durch das Zeichen $\wedge$ dargestellte logische Verknüpfung von zwei Aussagen p und q, gilt: $p \wedge q$ ist nur wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. (In allen anderen Fällen ist $p \wedge q$ falsch.) – Zwei Geraden g und h sind senkrecht zueinander, wenn h bezüglich der Spiegelung an g eine Fixgerade ist. – Eine Gruppe ist eine Menge G, auf der eine Verknüpfung o definiert ist und für die folgende Axiome gelten: ...*

Man erkennt leicht, dass dieser Form des Definierens Grenzen gesetzt sind. Die Definition muss Bezeichnungen verwenden, die ihrerseits erst zu definieren sind. Tut man dies, muss wieder auf neue, der Definition bedürftige Begriffe zurückgegriffen werden. Man durchläuft (rückwärts) eine Kette von Definitionen, die letztlich nur mit undefiniert gebrauchten Grundbegriffen begonnen werden kann. In der ebenen Geometrie pflegt man z. B. mit den Begriffen PUNKT, GERADE, EBENE zu beginnen, in anderen Fällen mit den Begriffen MENGE oder NATÜRLICHE ZAHL.

Begriffsdefinitionen pflegen in der Mathematik extensiv und explizit ausgelegt zu werden, d. h. dass nicht ausdrücklich angegebene Zusatzbedingungen unberücksichtigt bleiben und auch Grenzfälle einbezogen werden, die manchmal zunächst Kopfzerbrechen bereiten. Entstehende Begriffshierarchien sind zu beachten. Beispiele:

- Definiert man ein Trapez als Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten, so sind Parallelogramme, Rauten, Rechtecke und Quadrate ebenfalls (spezielle) Trapeze.
- $A \subseteq B$ bedeutet, dass alle Elemente der Menge A auch zur Menge B gehören: Da die leere Menge $\varnothing$ gar keine Elemente enthält, gilt stets $\varnothing \subseteq B$.

- Definiert man ein Prisma als Polyeder mit zwei zueinander parallelen und kongruenten Vielecken als Begrenzungsflächen, so dürfen Grund- und Deckflächen (regelmäßige oder unregelmäßige) auch Dreiecke oder Siebenecke sein und brauchen die übrigen Begrenzungsflächen nicht senkrecht zu ihnen zu verlaufen (d. h. es gibt schiefe Prismen).

Im Idealfall werden, wir schon erwähnt, Definitionen von Begriffen aus wenigen, undefiniert vorausgesetzten Grundbegriffen heraus entwickelt, indem jede Definition eines Begriffs nur bereits vorausgehend definierte Fachausdrücke verwendet.

Um die Eindeutigkeit der Begriffe zu sichern, pflegen dann Verfasser mathematischer Texte, zwar nicht generell, aber doch innerhalb einer sinnvollen Texteinheit

– jedem von ihnen gebrauchten und für die Informationsübermittlung bedeutsamen Ausdruck bzw. Symbol genau eine Bedeutung zuzuordnen (konsistenter Gebrauch von Bezeichnungen),
– und andererseits alle für die Informationsübermittlung wichtige Bedeutungen stets mit dem gleichen Ausdruck bzw. Symbol darzustellen (konsequenter Gebrauch von Bezeichnungen).

Bei der Auswahl von Symbolen werden sowohl Traditionen beachtet (eine Unbekannte wird meist mit x bezeichnet) als auch lernpsychologische Gesichtspunkte, wie z. B. leichte Merkbarkeit (r für Radius) oder Vermeidung von Verwechslungen: Da in der Zahlentheorie Primzahlen vorzugsweise mit p bezeichnet werden, stellt man in diesem Kontext rationale Zahlen häufig nicht mit $\frac{p}{q}$ dar).

Das Ideal einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung von Bedeutungen und Bezeichnungen bzw. Symbolen kann es nötig machen, alltagssprachlich mehrdeutige Ausdrücke differenziert zu gebrauchen. Man kann das am Beispiel der Wörter "ist" bzw. "sind" oder "und" studieren, indem man verschiedene (alltagssprachlich formulierte) Sätze betrachtet, in denen diese Wörter mit unterschiedlicher Bedeutung vorkommen. Bei der Übersetzung in Fachsprache und bei schriftlicher Darstellung mit fachlichen Symbolen werden die Bedeutungsunterschiede deutlich gemacht:

Sätze	**eigene fachliche Ausdrücke**	**eigene Symbole**
Das Dreifache von 7 ist 21	3 · 7 ist gleich 21	$3 \cdot 7 = 21$
21 ist eine ungerade Zahl.	21 ist Element von N_U	$21 \in N_U$
Die Vielfachen von 4 sind gerade Zahlen.	Die Menge der Vielfachen von 4 ist (echte) Teilmenge der Menge der geraden Zahlen	$V_4 \subset N_G$
Die Gleichung a · x = b ist in Q lösbar.	Zu allen natürlichen Zahlen a, b gibt <u>es</u> eine rationale Zahl x, für die a · x = b gilt	$\forall a, b \in N \; \exists x \in Q$ mit $a \cdot x = b$
Fünf Äpfel und drei Birnen ergeben acht Früchte.	Fünf plus drei ist gleich acht.	$5 + 3 = 8$
7 teilt 21 und 35. (nicht eindeutig!)	7 teilt 21 und 7 teilt 35 bzw. 7 teilt 21 plus 35	$7 \mid 21 \wedge 7 \mid 35$ bzw. $7 \mid (21 + 35)$
Die Funktion f hat nur die Werte +1 und –1.	Für alle x gilt: f (x) ist entweder_+1 oder –1	$\forall$ x: $(f(x) = +1 \vee f(x) = -1)$

c) Zum Beweisen mathematischer Sätze

Mathematische Aussagen sollen wahr sein. In dieser Forderung unterscheidet sich die Mathematik nicht von anderen Disziplinen; wohl aber in der Art, wie diese Wahrheit sichergestellt wird. Es sind letztlich nicht Experimente oder ein Vergleich mit der beobachtbaren Realität, die den Maßstab für die Wahrheitsprüfung liefern. Bezügen zur Wirklichkeit wird für mathematische Aussagen keine Beweiskraft zuerkannt. Experimente und Beobachtungen können aber beim Entdecken und Auffinden neuer Erkenntnisse hilfreich sein. Die Wahrheit mathematischer Sätze gilt aber nur dann als nachgewiesen, wenn sich diese logisch aus anderen, bereits als wahr anerkannten Sätzen ableiten lassen. Eine solche Ableitung nennt man unter bestimmten Voraussetzungen in der Mathematik einen Beweis. Da die für den Beweis als wahr vorausgesetzten Sätze ihrerseits beweisbedürftig sind, kommt man grundsätzlich in einen nicht endenden Regress. Dieser wird dadurch vermieden, dass man an den Anfang einer mathematischen Theorie sog. Axiome – unbewiesen als wahr angenommene Aussagen – setzt, von denen eine lückenlose Beweiskette ihren Ausgangspunkt nehmen kann. Nach Auffassung der modernen Mathematik muss das Axiomensystem selbst nur widerspruchsfrei und vollständig sein. Wahr sind nur die aus ihm hergeleiteten Sätze. Freilich kann eine Aussage auch wahr sein, wenn sie sich nicht herleiten lässt. Ja es kann sogar der Fall eintreten, dass eine Aussage und deren logisches Gegenteil (Verneinung) beide wahr sind, und zwar in folgendem Sinn: Jede dieser Aussagen darf zum Axiomensystem hinzugefügt werden, ohne dass ein Widerspruch entsteht; berühmtes Beispiel ist das sog. ‘Parallelenaxiom’. Zum Beweisen siehe TIETZE & KLIKA & WOLPERS 1997 oder HANNA 1997, wo verschiedene Möglichkeiten, mathematische Aussagen als „wahr“ anzusehen, diskutiert werden und auch weitere Literatur angegeben ist.

Was logisch zwingend ist, bestimmt im Idealfall ein genau festgelegtes System logischer Regeln, ein logisches Kalkül. Seine Regeln geben z. B. in einer Wahrheitstafel für jede Verknüpfung von Aussagen an, bei welcher ihrer Belegungen mit den Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" die neu gebildete Aussage selbst wahr oder falsch ist. Damit könnten Beweisschritte in der Mathematik schließlich rein formal – aufgrund der Wahrheitswerte von Aussagen und fixierten Schluss- und Verfahrensregeln – ohne Bezugnahme auf ihren Bedeutungsgehalt vollzogen werden. Für einige wichtige Junktoren hat die erwähnte Wahrheitstafel folgende Gestalt (p und q stehe für Elementaraussagen, w für *wahr* und f für *falsch*):

p	**q**	**$p \wedge q$** **p und q**	**$p \vee q$** **p oder q**	**$p \Rightarrow q$** **wenn p, dann q**	**$p \Leftrightarrow q$** **wenn p, dann und nur dann q**
w	**w**	w	w	w	w
w	**f**	f	w	f	f
f	**w**	f	w	w	f
f	**f**	f	f	w	w

Die wichtigste Rolle spielt in der Mathematik die Implikation. Denn der Beweis mathematischer Aussagen erfolgt hauptsächlich durch Verknüpfung von Aussagen mit dem Junktor *wenn...dann*. Sie werden geordnet, indem man klarstellt, welche Aussagen als Voraussetzung gewählt und welche Aussage dann als Folgerung aus diesen hergeleitet werden soll. Erstreckt sich die Deduktion nur auf wenige Lehrsätze einer Theorie, so spricht man von lokaler Ordnung. Im Fall der globalen Ordnung schließen sich beim Aufbau einer Theorie alle Beweise zu Ketten zusammen, die allerdings einen wohl bestimmten Anfang haben müssen. Er wird in den unbewiesen als wahr vorausgesetzten Sätzen (Axiomen) der Theorie gesehen.

Beweise haben sprachlich die Form eines Berichts. Die lineare Anordnung legt eine Abfolge von Handlungen nahe bzw. der Beweis kann und soll beim Lesen entlang einer solchen Abfolge rekonstruiert werden. Dabei kann der Grad der Handlungsorientierung verschieden stark sein: Eine gewisse Dynamik wird suggeriert in der Wendung: *Wir bilden die Zahl* $p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Viel statischer hingegen wirkt die Formulierung *Sei* z *die Zahl* $p_1 p_2 \dots p_n + 1$.

Die Verwendung von Symbolen lässt den Ablauf der Beweisschritte nur mehr an der linearen Abfolge erkennen: $z = p_1 p_2 \dots p_n + 1, \exists\, p\colon p / z, \dots$. Oder man vergleiche folgende drei Formulierungen:

- *Wir ziehen eine Gerade durch den festen Punkt und bestimmen den zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis ....*
- *Sei g die Gerade durch P. Sei Q der zweite Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kreis S.*
- $\forall g \in B(P)$ *sei* $Q = g \cap S$ (Dabei hat man schon irgendwann festgelegt, dass $B(P)$ das Geradenbüschel durch P sein soll).

Grundsätzlich sind Beweise in der Gegenwart geschrieben (ihre Gültigkeit wird ja als zeitlos angesehen). Dennoch findet man auch die Vergangenheit, wenn es darum geht, vorangegangene Beweisschritte zu vergegenwärtigen oder Beweisvoraussetzungen zu benennen: *Weil die Vektoren linear unabhängig waren, ...* Dies geschieht noch häufiger, wenn sich Metasprache und Beweissprache vermischen, etwa in Formulierungen wie *Weil wir linear unabhängige Vektoren gewählt hatten,...* Die Zukunft wird benutzt, um eine Vorausschau zu geben oder den Sinn der Unternehmung zu erklären: *Wir werden zeigen, dass jede Bewegung als Produkt von höchstens drei Spiegelungen geschrieben werden kann. Wir werden sehen, dass diese Definition zweckmäßig ist* ... Der Zeitenwechsel verweist darauf, dass der Beweis den Leser durch eine Handlungsfolge führt, über die er berichtet.

1.3 Fachausdrücke und fachliche Symbole

„Was fällt Ihnen zum Thema Mathematik ein?“ Stellt man diese Frage einem nicht fachkundigen Publikum, so kann man verschiedene Antworten erhalten: “ $a^2 + b^2 = c^2$ “, „Dort verwendet man *x*, *y* und *z*...“, „Da kommen Wurzeln, Sinus und Logarithmus vor...“.

Das Gemeinsame in diesen Äußerungen ist offensichtlich, dass Mathematik durch Hinweise auf die Sprache der Mathematik, insbesondere die Verwendung von Symbolen und Fachausdrücken beschrieben wird. Natürlich haben auch die Texte anderer Wissenschaften charakteristische Merkmale, wie etwa das Vorkommen von Formeln der Gestalt H_2O oder C_6H_6 unschwer an Chemie denken lässt. Eine Einführung in die wissenschaftliche Beschreibung von Fachsprachen bietet etwa FLUCK (1985). Gleichwohl ist der Gebrauch spezieller Symbole und Diagramme so typisch für einen mathematischen Text, dass auch ein in Indonesisch geschriebener mathematischer Text, wie das nachfolgende Beispiel, weltweit als mathematischer Text erkannt wird:

- *Garislurus y = ax + 3 melalui titik tetap (0;3) dengan keceruan a.*

Die meisten Mathematiker werden erraten, dass von einer Geraden durch den Punkt (0;3) mit Steigung *a* die Rede ist, auch wenn sie sonst der indonesischen Sprache nicht mächtig sind. Die klassischen Beweisfiguren zum Satz des Pythagoras können in einem Schulbuch in Deutsch oder Japanisch, Tamil oder Arabisch verstanden werden. Der an Symbolen arme originale Text aus den Elementen des Euklid ist hingegen ohne Kenntnisse des Griechischen nicht verständlich:

Ε*ν τοις ορθογωνιοις τριγωνοις το απο της την ορθην γωνιαν υποτεινουσης πλευρας τετραγωνον ισον εστι τοις απο των την ορθην γωνιαν περιεχουσων πλευρων τετραγωνοις.* Ε*στω τριγωνον ορθογωνιον το* ΑΒΓ *ορθην εχον την υπο* ΒΑΓ *γωνιαν λεγω οτι το απο της* ΒΓ *τετραγωνον ισον εστι τοις απο των* ΒΑ, ΑΓ *τετραγωνοις.* [Euclidis Elementa Liber I,47 (EUKLEIDES 1969)].

Übersetzt: In den rechtwinkeligen Dreiecken ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite gleich den Quadraten über den rechten Winkel umfassenden Seiten. Sei ein rechtwinkeliges Dreieck das

[Dreieck] ΑΒΓ, welches den rechten Winkel bei ΒΑΓ hat, so sage ich, dass das Quadrat über der [Seite] ΒΓ gleich ist den Quadraten über den [Seiten] ΒΑ, ΑΓ.

Gerade in der "höheren" Mathematik können wesentliche Inhalte durch Formeln gewissermaßen "nonverbal" ausgedrückt werden:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \text{oder} \quad \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega \,.$$

Die korrekte Versprachlichung komplexer Formeln kann oft schwierig sein, und zwar nicht nur für Schüler oder Studenten, sondern auch für professionelle Mathematiker, wenn sie nämlich in einer Fremdsprache vortragen müssen.

In einem Text, in dem ein Mathematiker fachliche Begriffe erklärt, mathematische Lehrsätze formuliert und begründet, die Lösung eines mathematischen Problems darlegt oder einen größeren fachlichen Zusammenhang, etwa ein geschlossenes mathematisches Theoriegebiet, darstellt, erkennt man in der Regel deutliche Unterschiede zwischen der dort verwendeten Sprache und der Sprache, wie sie in anderen Wissensbereichen, in der Belletristik oder in der alltäglichen Kommunikation verwendet wird. Gleiches trifft zu, wenn man einen Mathematiker über sein Fachgebiet vortragen hört. Allerdings ist die mathematische Fachsprache keineswegs eine eindeutig definierbare, in sich geschlossene und starr angewendete Sprachform. Vielmehr lassen sich Ausprägungen wahrnehmen, die sich, in Anpassung an den jeweiligen Arbeitsgegenstand und die jeweiligen kommunikativen Situation, hinsichtlich verschiedener Merkmale erheblich voneinander unterscheiden können. Die mathematische Fachsprache unterlag und unterliegt auch historischem Wandel. Die Besonderheiten der mathematischen Fachsprache wurden schon in mehrfach beschrieben; stellvertretend für viele Arbeiten, die dieses Thema in etwas breiterer Perspektive behandeln, seien genannt: DALE & CUEVAS (1987), GRIESEL (1978), HALLIDAY (1974), MAIER & BAUER (1978), PIMM (1987), LABORDE (1990), MUNRO (1990), SCHWEIGER (1993a, 1993b und 1996b).

Die Übergänge von der Alltagssprache zu einer mehr und mehr fachlichen Sprache des Mathematikers sind fließend und stetig. Im Folgenden soll in idealtypischer Weise aufgezeigt werden, welche Elemente und Strukturen bei diesem Übergang hauptsächlich eine Rolle spielen.

1.3.1 Fachwörter

Auf der Ebene der kleinsten bedeutungstragenden Einheiten fallen zunächst lexikalische Unterschiede ins Auge. In der mathematischen Sprache werden "*Fachausdrücke*" verwendet. Damit kann dreierlei gemeint sein, was deutlich voneinander unterschieden werden sollte:

– die Verwendung von Wörtern, die in der Alltagssprache nicht vorkommen. Beispiele: *Primzahl*, *Divisor*, *Dezimalbruch*, *Ungleichung lösen*, *Hypotenuse*, *Parallelogramm*, *Vektor*, *Sinus*, *Logarithmus*, *addieren*, *orthogonal*, *Matrix*, ...

– die Verwendung von Wörtern, die auch in der Alltagssprache in gleicher oder ähnlicher Bedeutung vorkommen. Beispiele: *Gerade*, *Dreieck*, *Quadrat*, ...

– die Verwendung von Lexemen der Alltagssprache in einer, von der dort üblichen abweichenden Bedeutung, wobei eine nähere Analyse oft eine gemeinsame Herkunft bloßlegt: *Produkt* ‘Ergebnis einer Multiplikation oder einer algebraischen Konstruktion’ bzw. ‘Ergebnis eines Herstellungsprozesses’, *rational* (als Adjektiv im Syntagma *rationale Zahl* oder *rationale Funktion* bzw. ‘vernünftig’; in beiden Fällen auf lat. *ratio* zurückgehend, welches sowohl ‘Verhältnis’ wie ‘Vernunft’ bedeuten kann). Kulturgeschichtlich interessant sind Lehnübersetzungen, wie z. B. *Wurzel* aus lat. *radix* über arab. *ǧiḏr* aus ai. *mûla*, wobei es auch manchmal zu Fehlern gekommen ist. Das Lehnwort *Sinus* (aus lat. *sinus* von arab. *ǧaib* ‘Busen’) ist aus altind. *jyâ* 'Sehne (eines Bogens, die einen Winkel misst)’ entstanden.

Ebenso interessant sind Neuschöpfungen durch Mathematiker, in denen ein metaphorischer Gebrauch erkennbar ist: *Ring* (als algebraische Struktur: geschlossen wie ein Ring, da Addition und Multiplikation nicht hinausführen), *Integral* (als Synonym für Stammfunktion: die durch Ableitung veränderte Funktion wird wieder „ganz" [lat. *integer*] gemacht, das heißt wiederhergestellt), *Apfelmännchen* (anschaulicher Name für die Mandelbrotmenge, die durch die Chaosforschung populär wurde).

a) Arten von Fachwörtern

Als mathematische Fachausdrücke in dem oben beschriebenen Sinn werden verwendet:

– Substantive zur Bezeichnung mathematischer Objekte (z. B. *Summe*, *Trapez*, *Polyeder*, *Gleichung*, *Relation*, *Funktion*, *Polynom*, *Ring*, *Körper*, usw.)

  Zunächst wurden Objekte unseres Denkens bezeichnet, die anschaulichen Gegenständen entsprechen: *Dreieck*, *Kreis*, *Parabel*, *gerade Zahl*, *Wurzel aus* 2 (Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt), *Sinus von* α, etc. Dabei gibt es sogar bedauerliche Lücken, die trotz vieler guter Ideen nicht gefüllt wurden: Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen oder zur Logarithmusfunktion gibt es z. B. keinen Standardnamen und keine Standardbezeichnung für eine so gebräuchliche Funktion wie $f(x)=x^2$ (auch das umfangreiche DIN-Taschenbuch 202 macht in der Ausgabe 1994 dafür keinen Vorschlag).

  Natürlich hat hier schon frühzeitig eine Bildung von Klassen eingesetzt: *Dreiecke* und *Vierecke* sind Beispiele für *Vielecke*, *Sinus von* α und *Wurzel aus x* sind Beispiele für *Funktionen*, *Kreis* und *Parabel* Beispiele für *Kurven.* Aber es ist ein Kennzeichen der modernen Mathematik, dass im Vordergrund Strukturen (also Mengen von Objekten) stehen, deren Elemente für sich keinen eigenen Namen mehr haben. Die Zahlbereiche (*natürliche*, *ganze*, *rationale*, *reelle Zahlen* usw.) werden nach ihren Elementen benannt. Für die Elemente einer *Gruppe* oder eines *Ringes* gibt es aber keine eigenen Namen. Die Elemente eines „abstrakten" *Vektorraums* heißen (nach ihren Vorläufern aus Physik und Geometrie) *Vektoren*, die Elemente des *Dualraumes* werden aber *lineare Funktionale* genannt.

– Adjektive zur Bezeichnung von Eigenschaften mathematischer Objekte (z. B. *ungerade*, *rational*, *rechtwinkelig*, *kommutativ*, *transitiv*, *differenzierbar*, ...).

  In semantischer Hinsicht unterscheidet man oft zwischen relativen und absoluten Adjektiven (siehe HENTSCHEL & WEYDT 1994). *Klein* ist ein relatives Adjektiv, denn ein kleiner Elefant ist vielleicht klein im Vergleich zu anderen Elefanten, aber immer noch größer als eine Ameise. In der Mathematik werden diese Adjektive meist nur metaphorisch verwendet: In der Figur ist ein *kleines* Dreieck erkennbar. Hingegen ist *prim* ein absolutes Adjektiv, ebenso wie *stetig*, *rechtwinkelig*, ...

  Es ist allerdings zu beachten, dass nicht alle Adjektive spezifizierend verwendet werden, d. h. im streng logischen Sinn eine Teilklasse der betrachteten Klasse aussondern: Eine *gerade* (natürliche) Zahl ist eine spezielle natürliche Zahl, nämlich eine Zahl, die durch 2 teilbar ist. *Rationale* Zahlen sind keine speziellen (natürlichen) Zahlen, sondern bezeichnen gegenüber den natürlichen Zahlen neue Objekte. Natürlich kann man unter *Zahl* allgemein *reelle Zahl* verstehen; dann ist eine rationale Zahl eine spezielle Zahl. Diese Deutung ist im Aufbau der Zahlbereiche, zumindest im Schulunterricht, nicht üblich. Ähnliches gilt auch für die Bezeichnung *komplexe Zahl.* Erst wenn man einen Zahlbegriff festgelegt hat, der auch den Begriff KOMPLEXE ZAHL umfasst, kann man komplexe Zahlen als spezielle Zahlen definieren. Dennoch ist die Bezeichnung *komplexe Zahl* sinnvoll, wenn man damit andeuten will, dass komplexe Zahlen gewisse Eigenschaften mit anderen Zahlbereichen teilen.

  Adjektive können auch beifügend gebraucht werden: FREUDENTHAL (1973, S. 584) meint, dass eine *geordnete Gruppe* keine Gruppe sei, sondern ein Paar, bestehend aus Gruppenstruktur und Ordnungsstruktur. Damit hätte er Recht, wenn Adjektive nur spezifizierend gebraucht werden dürften; aber unsere Sprache verhält sich nicht so: Eine *gut gekleidete Dame* wäre dann keine Dame, sondern (mathematisch gesehen) ein Paar aus

Dame und Kleidung. Er schreibt auch, dass eine *Galoissche Gruppe* keine Gruppe sei, sondern ein Funktor (d. h. durch die Zuordnung zu einer Körpererweiterung wird eine Gruppe zur Galoisschen Gruppe dieser Körpererweiterung). Dann ist aber ein Zugpferd auch kein Pferd, denn nur solange es vor dem Wagen oder Pflug gespannt ist, tritt es als Zugpferd auf.

In der mathematischen Kommunikation sind auch eher widersprüchlich anmutende Beifügungen möglich und wohl auch hilfreich. Dies trifft vor allem für sogenannte resultative Adjektive zu: Ein Rhombus ist ein verschobenes Quadrat: Natürlich ist ein Rhombus kein Quadrat, aber er kann aus einem Quadrat durch eine affine Abbildung gewonnen werden, die die Seitenlängen des Quadrates nicht verändert (wohl aber die Winkel). Ein *Schiefkörper* ist ein Körper ohne Kommutativgesetz: Streicht man aus der Liste der einen Körper bestimmenden Axiome das Kommutativgesetz, so erhält man die Definition eines Schiefkörpers. In all diesen Fällen ist das neue Objekt das Resultat von verändernden Handlungen oder Prozessen: Wein ist *vergorener* Traubensaft, aber eben kein Traubensaft mehr. Auch ein *abgebranntes Haus* ist eben leider kein Haus mehr.

Adjektive können auch explizierend verwendet werden, d. h. sie drücken eine Eigenschaft aus, die in der Bedeutung des Nomens mehr oder minder schon enthalten ist: *der weite Ozean*. In der knappen Ausdrucksweise der Mathematik werden aber solche Ausdrücke eher vermieden. Es gibt Adjektive (skalenbildende Adjektive genannt), die mit reellwertigen Funktionen (zumeist Messwerten) zusammen verwendet werden können, wie *groß*, *lang*, *dünn, teuer, heiß, ...* Werden sie *polar* gebraucht, wird das Gegenteil zumeist durch ein eigenes Wort ausgedrückt: *groß - klein*, *lang - kurz*, *dick - dünn*,... Ähnlich verhält es sich bei Komparativen, durch die zweistellige Relationen beschrieben werden: *größer - kleiner*, *höher - niedriger*,... Beim skalenspezifischen Gebrauch, wie etwa *ein Blatt Papier ist* 0,1 mm *dick* (d. h. *dünn*!), *diese Maus ist 5 cm lang* (eigentlich nicht lang!), wird in der Regel nur ein Wort dieser Polarität verwendet. Natürlich gibt es hier stilistisch bedingte Ausnahmen: *Der Schriftsteller N.N. ist fünfzig Jahre jung.* Aber schon in der Geburtenstation ist es üblich zu sagen: *Dieses Baby ist zwei Tage alt*. Manche Adjektive dieser Art werden nur selten zusammen mit Zahlenwerten verwendet. Statt *Dieses Buch ist* 5 € *teuer* formuliert man eher *Dieses Buch kostet* 5 €. Bei Temperaturen sagt man meist nur *Heute hat es* 5° (Celsius) statt *Heute ist es* 5° (Celsius) *kalt*. (Als linguistische Studie zu diesem Thema sei auf VARNHORN 1993 verwiesen.)

Eine Eigentümlichkeit der höheren Mathematik ist ferner die Verwendung einiger weniger Adjektive mit eher unbestimmter Bedeutung: *regulär, normal*,.... Eine reguläre Matrix und ein reguläres Polyeder haben weniger gemeinsam als ein grünes Krokodil und ein grünes Blatt. Eine *reguläre* Matrix stellt ja gewissermaßen den „Normalfall" dar (als Gegensatz zu einer *singulären* Matrix, also einer Matrix, deren Determinante verschwindet). Hingegen ist ein *reguläres* Polyeder eine besonders harmonische Ausnahmeerscheinung unter den Polyedern. Es gibt im 3-dimensionalen Raum ja auch nur fünf reguläre Polyeder (genauer fünf Typen regulärer Polyeder): Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Ein *nicht-reguläres* Polyeder wird nicht als singuläres Polyeder bezeichnet.

– <u>Verben</u> zur Bezeichnung mathematischer Handlungen (*subtrahieren*, *differenzieren*, *zuordnen*, *den größten gemeinsamen Teiler bestimmen*, *punktspiegeln*, *scheren*, *potenzieren*, *integrieren*, ...)

  In der Linguistik werden Verben semantisch nach Handlung, Vorgang und Zustand klassifiziert. Handlungsverben, bei denen das Subjekt „handelt", regieren meist ein Objekt. Sie werden in mathematischen Texten vor allem metasprachlich verwendet: *wir konstruieren, schneiden, berechnen, differenzieren,...* Der fachsprachlichen Verwendung liegt nämlich die Vorstellung zugrunde, dass mathematische Gegenstände selbst wie Subjekte handeln: *die Gerade schneidet den Kreis,* 2 *teilt* 12, ... Die Einteilung in Vorgangsverben (*fallen, wachsen, ...*) und Zustandsverben (*stehen, wohnen, ...*) ist unscharf und kontextabhängig. Fachsprachlich gibt es eigentlich nur Zustände, denn der Satz 2 *teilt* 12 beschreibt kein Geschehen, sondern einen Zustand (eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen), ebenso *Jede Gerade schneidet eine kubische Parabel in höchstens drei Punkten, die Tangensfunktion steigt monoton, die Folge konvergiert nach Null, ...* Viele dieser Eigenschaften können nun durch entsprechende Tätigkeiten erkannt oder überprüft werden: 2 *teilt* 12 durch Dividieren, *jede Gerade schneidet eine kubische Parabel in höchstens drei Punkten* durch Zeichnung oder Rechnung, usw. Die berühmte Formulierung $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \ldots$ ist eine Übersetzung des „dynamischen" Konvergierens in eine „statische" Beschreibung.

In der mathematischen Sprache findet man häufig Modalverben wie *dürfen, können, mögen, müssen, sollen, wollen*; *man kann beweisen, wir wollen zeigen, man darf nicht durch Null dividieren, man muss voraussetzen, man soll vorher überlegen.*

Einige weitere Beobachtungen zur Verwendung von Verben werden im Kapitel Zur Syntax und Semantik der mathematischen Fachsprache angefügt werden.

– Zahlwörter als Wortklasse, an die man am ehesten denkt, wenn von Mathematik die Rede ist. Hierher gehören Grundzahlwörter und davon abgeleitete Bildungen: *minus fünfundzwanzig,* Ordnungszahlwörter *der sechste* und Bruchzahlen *drei Viertel.* Den Zahlwörtern ist als Anhang 2 ein eigener Abschnitt gewidmet.

– Ausdrücke für Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. *gleich*, *kleiner als*, *teilbar durch*, *parallel zu*, *kongruent zu*, *ähnlich zu*, *achsensymmetrisch zu*, ...). Sprachlich gesehen sind es statische Verben, die im Deutschen aber meist in einem Syntagma der Art „Adjektiv + Kopula" ausgedrückt werden. Deutlich ist dies bei Ausdrücken, wo ein synonymes Verbum verwendet werden kann – *x ist Element von ...* ist bedeutungsgleich mit *x gehört zu ...* , 18 *ist teilbar durch* 6 entspricht 6 *teilt* 18 oder – wo eine anschauliche Verstärkung durch ein statisches Verbum erfolgen kann – die Gerade *g liegt parallel* zur Geraden *h.* Statische Verben beschreiben in diesem Sinn das Ergebnis von Vorgängen*:* Wir *ziehen* eine zu h parallele Gerade.

– Ausdrücke für logische Objekte und Beziehungen (z. B., *Existenzquantor, Allquantor, Aussage*, *Aussageform*, *nicht – Negation*, *und – Konjunktion*, *wenn... dann – Implikation*, *genau dann...*, *wenn – Äquivalenz*,). Bei den Quantoren handelt es sich um indefinite Pronomina und Adverbien bzw. um Syntagmen, die solche umschreiben: *für alle*, *es gibt ein*,... Auch hier unterscheidet sich die Alltagssprache von der mathematischen Fachsprache. Die Sätze *Alle Bleistifte sind rot* und *Einige Bleistifte sind rot* werden eher als widersprüchlich empfunden, obwohl dies im mathematischen Sinn nicht der Fall ist. Auch muss die verschiedene Verwendung des Artikels im Deutschen erwähnt werden. Der bestimmte Artikel kann etwa referentiell verwendet werden, d. h. er bezieht sich auf ein Objekt, welches schon genannt wurde oder dessen Referenz sich aus dem Kontext ergibt: *Der* Garten meines Nachbarn ist voller Blumen. *Die* so erhaltene Schneeflockenkurve ist eine stetige, aber nicht rektifizierbare Kurve. Sehr oft aber wird der bestimmte Artikel generisch verwendet, d. h. er signalisiert eine Allaussage: *Der* Löwe ist ein Beutegreifer = *Alle* Löwen sind Beutegreifer. *Die* Ellipse ist ein Kegelschnitt = *Alle* Ellipsen sind Kegelschnitte. Der unbestimmte Artikel kann aber ebenfalls generisch verwendet werden: *Ein* Löwe ist ein Beutegreifer = *Alle* Löwen sind Beutegreifer. *Eine* Ellipse ist ein Kegelschnitt = *Alle* Ellipsen sind Kegelschnitte. Ansonsten steht der unbestimmte Artikel eben für unbestimmte Objekte: *Ein* Mann steht vor der Tür. Wir sehen hier *ein* Dreieck. Wie die Beispiele zeigen, bedeutet unbestimmt**,** dass noch weitere Informationen zur genaueren Festlegung nötig erscheinen.

Den Beziehungen entsprechen sprachlich gesehen Konjunktionen oder eine Folge von Konjunktionen; das Bestehen dieser Beziehungen wird durch ein Nomen ausgedrückt. Man kann hier auch deutlich den Unterschied zwischen mathematischer Sprache und Metasprache erkennen: Das Wort *Allquantor* gehört zur Metasprache; in einem mathematischen Satz wird die durch den Allquantor beschriebene Beziehung meist durch *für alle* oder *zu jedem/ zu jeder* ausgedrückt: *Für alle* reellen Zahlen *x* und *y* gilt das Gesetz $x + y = y + x$. Schreibt man dieses Gesetz in der Form $\forall x, y \colon x + y = y + x$, so wird man natürlich auch sagen „$\forall$ ist der Allquantor" (statt korrekter: „$\forall$ bezeichnet den Allquantor").

b) Konjunktionen

Die zuletzt besprochenen Ausdrücke stellen einen Teilbereich dessen dar, was man in der Linguistik Konjunktionen nennt. Sie werden dort nach ihrer syntaktischen Funktion in koordinierende (*und, oder, aber*), subordinierende (*weil, dass, obwohl, denn*) und Infinitivkonjunktionen (*um zu, ohne zu*) eingeteilt. Morphologisch unterscheidet man einteilige (*und, oder, aber*) von mehrteiligen (*entweder...oder, wenn...dann*). Für mathematische Texte am wichtigsten ist indes die semantische Klassifikation.

– Additive und disjunktive Konjunktionen:

  Die wichtigste additive Konjunktion ist *und.* Nur wenn vollständige Sätze verbunden werden, entspricht die Verwendung dieser Konjunktion einigermaßen der logischen Konjunktion: *Die Zahl 2 ist gerade und die Zahl 2 ist eine Primzahl.* Durch Tilgung des ko-referentiellen gemeinsamen Subjektes im zweiten Satz entsteht: *Die Zahl 2 ist gerade und eine Primzahl.* Auch eine Konstruktion wie *Die Ellipse ist ein Kegelschnitt und die Hyperbel ist ein Kegelschnitt.* kann verkürzt werden, indem das gemeinsame Prädikat (samt Kopula) im ersten Teilsatz getilgt wird. Dafür muss aber das Prädikat (samt Kopula) in den Plural gesetzt werden: *Die Ellipse und die Hyperbel sind Kegelschnitte.* Anderes Beispiel: *Ich konstruiere ein Dreieck und ich konstruiere den Umkreis.* Verkürzt ergibt das: *Ich konstruiere ein Dreieck und den Umkreis.*

  Die Koordinierung von Nebensätzen oder Attributen mit anschließender Tilgung kann ein anderes Resultat ergeben. Die Sätze *Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel* und *Es gibt rechtwinkelige Dreiecke* sind offenbar bedeutungsgleich. Ebenso die beiden Sätze *Es gibt Dreiecke mit einem stumpfen Winkel* und *Es gibt stumpfwinkelige Dreiecke.* Koordiniert man die beiden Sätze mit *und* und tilgt gemeinsame Satzteile, so ergibt sich der Satz *Es gibt rechtwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke.* Er kann als richtig akzeptiert werden (möglicherweise wird er aber unter Hinweis, dass es auch spitzwinkelige Dreiecke gibt, als falsch bezeichnet!). Der durch Tilgung entstehende Satz *Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel und mit einem stumpfen Winkel* wird von Mathematikern aber als falsch bezeichnet, denn das gleichzeitige Vorkommen eines rechten Winkels und das Vorkommen eines stumpfen Winkels in einem Dreieck ist nicht möglich. Ein richtiger Satz entsteht aber, wenn man mit *oder* koordiniert und hernach verkürzt: *Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel oder mit einem stumpfen Winkel.*

  Die wichtigste disjunktive Konjunktion ist *oder.* Es wird oft darauf hingewiesen, dass man zwischen dem ausschließenden Gebrauch (verstärkt *entweder ... oder* bzw. bei Verneinung *weder ... noch*) und dem nicht ausschließenden Gebrauch, der der logischen Verknüpfung der Disjunktion entspricht, zu unterscheiden habe. Wie aber gezeigt wurde, kann *oder* aus der Koordinierung zweier mit *und* verbundenen Sätze entstehen. Mathematisch wäre ja auch der Satz *Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel oder es gibt Dreiecke mit einem stumpfen Winkel.* akzeptabel. Er hat aber fast unvermeidlich die ausschließende Lesart und ist dann unzutreffend.

  Die Konjunktionen *und* bzw. *oder* können austauschbar sein, insbesondere wenn sie an verschiedenen Stellen des Satzes auftreten: *Ich trinke gerne weißen und roten Wein = Ich trinke gerne weißen oder roten Wein. In Italien gibt es weißen und roten Wein = Der Wein in Italien ist weiß oder rot. Jeden Tag gibt es weißen und roten Wein ≠ Jeden Tag gibt es weißen oder roten Wein. Dieses Problem ist nur für* $n = 1$ *und* $n = 2$ *lösbar = Nur wenn* $n = 1$ *oder* $n = 2$ *ist, ist dieses Problem lösbar*.

  Wenn das Wort *und* die Bedeutung einer Aufzählung der möglichen Fälle hat, so kommt es sogar dazu, dass die Phrase *es gibt* die logische Bedeutung *für alle* einschließt: *Es gibt spitzwinkelige, rechtwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke* (= Jedes Dreieck ist entweder spitzwinkelig, rechtwinkelig oder stumpfwinkelig). Es soll ausdrücklich betont werden, dass die Interpretation als vollständige Aufzählung vom Kontext bzw. der Semantik der vorkommenden Ausdrücke abhängt und kein syntaktisches Merkmal ist, wie der Vergleich der folgenden Sätze zeigt: *In dieser Schule wird Englisch, Latein und Französisch unterrichtet* (vermutlich ist diese Aufzählung vollständig!). *In Finnland spricht man Finnisch und Schwedisch* (dies trifft für fast alle Teile der Bevölkerung zu). *In Afrika leben Giraffen, Zebras und Elefanten* (aber auch Löwen und viele andere Tiere).

- Adversative Konjunktionen (*aber, allein, doch, jedoch, sondern, nur*):

  Man beachte, dass die Verwendung von *sondern* nur möglich ist, wenn der vorangehende Satz oder Satzteil eine Negation enthält: *51 ist keine Primzahl, sondern durch 17 teilbar.* Das Fehlen einer (vermuteten) Implikation wird durch *aber* signalisiert. Oft wird so ein Gegenbeispiel formuliert: *2 ist eine Primzahl, aber gerade.* Man könnte ja voreilig meinen, dass alle Primzahlen ungerade sind. *Die Logarithmusfunktion ist keine rationale Funktion, aber ihre Ableitung ist eine rationale Funktion*. Man könnte vermuten, dass die Stammfunktionen rationaler Funktionen wieder rational sind.

- Finale Konjunktionen (*damit, um zu*) und kausale Konjunktionen (*weil, da*):

  Die Verwendung in der mathematischen Fachsprache ist vorwiegend die Begründung einer Definition, eines Verfahrens, eines nächsten Schrittes: *Die Erweiterung der natürlichen Zahlen zur Menge der ganzen Zahlen erfolgt, damit die Subtraktion ohne Einschränkung möglich wird. Um zu besseren Näherungen zu gelangen, kann das Verfahren wiederholt werden. – Weil die Subtraktion nicht für alle Paare natürlicher Zahlen durchführbar ist, erweist sich die Einführung der ganzen Zahlen als hilfreich. Da die Folge der Näherungswerte konvergent ist, kann man auf diese Weise beliebig gute Näherungswerte erhalten.* Mit kausalen Konjunktionen können auch Implikationen in der Form von Handlungsanweisungen ausgedrückt werden: *Weil der Faktor* A *nicht verschwindet, können wir durch* A *dividieren.* Dieser Satz enthält eine Implikation wie: *Wenn* $A \cdot B = A \cdot C$ *und* $A \neq 0$, *so ist* $B = C$.

- Konditionale Konjunktionen (*wenn, falls, sofern, dann und nur dann ... wenn, genau dann ... wenn, nur wenn*):

  Dem Mathematiker ist der Bedeutungsunterschied der nachfolgenden drei Sätze klar: *Wenn es morgen regnet, gehe ich ins Kino. Nur wenn es morgen regnet, gehe ich ins Kino. Genau dann, wenn es morgen regnet, gehe ich ins Kino.* Man hat zwei Aussagen α = *Es regnet morgen* und β = *Ich gehe ins Kino.* Die genannten Sätze haben die logische Gestalt: $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$ und $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

  Es gehört zu den auffallenden Erscheinungen im Übergang von der Alltags- zur Fachsprache, dass die durch *wenn* bzw. *wenn ... dann* ausgedrückte Implikation, so oft mit einer Äquivalenz verwechselt wird. Lassen sich dafür plausible Gründe finden? *Wenn* ist zunächst eine temporale Konjunktion. Die Aufeinanderfolge von Zeitabläufen könnte das Modell für die kausale Beziehung und sodann das Modell für die logische Beziehung der Implikation gewesen zu sein: *Wenn Wolken aufziehen, wird es regnen. Wenn die Nacht hereinbricht, wird es kalt. Wenn Achilles schneller als die Schildkröte ist, wird er sie rasch einholen.* Die folgenden Sätze unterscheiden sich semantisch aber kaum: *Weil Wolken aufziehen, wird es regnen. Da die Nacht hereinbricht, wird es kalt. Da Achilles schneller als die Schildkröte ist, wird er sie rasch einholen.* Es ist aber folgendes zu bemerken. Die Aussagen *Wenn Wolken aufziehen, wird es regnen* bzw. *Weil Wolken aufziehen, wird es regnen* sind offenbar in gewissen Klimazonen empirisch richtig. Da es aber nur regnen kann, wenn Wolken aufziehen, ist auch die Aussage *Genau dann wenn Wolken aufziehen, wird es regnen* akzeptabel.

  Bei Schönwetter sind auch die Aussagen *Wenn die Nacht hereinbricht, wird es kalt* und *Weil die Nacht hereinbricht, wird es kalt* zumeist zutreffend. Da es aber tagsüber warm ist, gilt die Umkehrung: *Wenn es kalt wird, ist die Nacht hereingebrochen*. Auch der Satz *Wenn Achilles schneller als die Schildkröte ist, wird er sie rasch einholen* legt den Umkehrschluss nahe. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, so ist das doch ein Beweis dafür, dass Achilles eben schneller als die Schildkröte ist.

Auch die in allen empirischen Wissenschaften übliche reduktive Schlussweise, beruht ja nur auf der Plausibilität eines Umkehrschlusses. *Wenn ein Gesetz eine bestimmte Form hat, so müssen Messungen die und die Resultate ergeben*. Ergeben nun viele Messungen die erwarteten Resultate (und ist die Zahl der abweichenden Resultate gering oder deren Auftreten „erklärbar"), so gilt das Gesetz als „bewiesen". Auch in der Mathematik ist diese Schlussweise heuristisch brauchbar und nützlich. Messungen an vielen Dreiecken erwecken den Verdacht, dass die Winkelsumme 180° beträgt - aber dies ist kein Beweis. Alle Rechnungen deuten darauf hin, dass jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann („Goldbachsche Vermutung"), aber bis heute ist kein Beweis bekannt. Lange glaubte man, dass eine ebene stetige Kurve die Dimension 1 hat, bis *Peano* zeigte, dass eine stetige Kurve ein Quadrat ausfüllen kann (und wie man heute weiß, auch ein Fraktal sein kann, d. h. letztlich jede Zahl zwischen 1 und 2 als Dimension auftreten kann).

Natürlich gibt es auch im Alltag Fälle, wo die Korrelation zwischen Nebensatz und Hauptsatz gering ist, so dass die Umkehrung nicht naheliegt: *Wenn die Zündspule schadhaft ist, springt der Motor nicht an* (aber es sind viele andere Ursachen denkbar). *Wenn du zu viel trinkst, bekommst du Kopfweh.* Die „Umkehrung" wird dann zumeist als Vermutung formuliert: *Wenn der Motor nicht anspringt, könnte es an der Zündspule liegen. Erzähl' mir nichts vom schlechten Wetter; du hast bestimmt Kopfweh, weil du viel getrunken hast.*

Im heutigen Deutsch gibt es allerdings gewisse Unterschiede im Gebrauch der Tempora: Bei einer zeitlichen Aufeinanderfolge ist der Nebensatz in der Regel *vorzeitig*, d. h. steht der Nebensatz in der Gegenwart, so steht der Hauptsatz in der Zukunft (allerdings wird vor allem umgangssprachlich das Präsens statt des Futurs verwendet): *Wenn Wolken aufziehen, wird es regnen* bzw. *Wenn Wolken aufziehen, regnet es.* Bei der Umkehrung ist der Nebensatz nachzeitig, d. h. so dass meistens der Hauptsatz in der Gegenwart und der Nebensatz in der Vergangenheit steht: *Es regnet, weil Wolken aufgezogen sind.* (Es ist aber auch der Satz *Es regnet, weil Wolken aufziehen* möglich). Hingegen ist bei logischen und als gesetzmäßig angesehenen kausalen Beziehungen die Gleichzeitigkeit üblich: *Wenn das Quadrat einer ganzen Zahl gerade ist, so ist diese Zahl gerade.* Oder: *Weil Wasser bei 4° die größte Dichte besitzt, frieren Teiche und Seen nicht so schnell ein.* [4] Und nicht: **Weil Wasser bei 4° die größte Dichte besaß, frieren Teiche und Seen nicht so schnell ein. Weil ich die Sache nochmals überdachte, habe ich dir Rechnung nochmals angesehen. Weil die Solarzelle ausfiel, sendet der Satellit keine Daten mehr. Weil ich keinen Fehler machen will, rechne ich alles zweimal. Weil Phosphor leicht brennbar ist, muss man damit vorsichtig umgehen.* Hingegen wird bei einmaligen kausalen Verkettungen auch das Muster der Vorzeitigkeit des Nebensatzes gebraucht (vor allem, wenn der Hauptsatz einen Zustand ausdrückt): *Weil wir zu Hause einen schönen Schäferhund hatten, liebe ich Hunde sehr.*

Bei Beweisen, die als Erzählungen strukturiert sind, wird dieses Muster gebraucht, um auf schon länger zurücklegende Definitionen, Vereinbarungen etc. hinzuweisen: *Weil der Bruch* $\frac{p}{q}$ *aber schon gekürzt war, erhalten wir einen Widerspruch.*

Bei logischen Zusammenhängen würde eine Vorzeitigkeit des Nebensatzes merkwürdig klingen: *Wenn das Dreieck rechtwinkelig ist, wird der Satz des Pythagoras gelten. Weil das Dreieck rechtwinkelig war, gilt der Satz des Pythagoras.* Tatsächlich klingen diese Sätze weniger merkwürdig, wenn sie in einem Beweisablauf (einer „Beweiserzählung") eingebettet sind. *Wir erinnern uns an das zuvor gezeichnete Dreieck. Weil das Dreieck rechtwinkelig war, gilt der Satz des Pythagoras.* Sehr häufig findet man allerdings den Konjunktiv des Präteritums im Folgesatz, vor allem beim „indirekten Beweis". *Wenn diese Zahl rational ist, könnte man sie als gekürzten Bruch schreiben. Wenn diese Funktion keine Nullstelle besitzt, wäre die reziproke Funktion*

[4] Es sei an die Verwendung des Zeichens * erinnert. Es hat zwei verschiedene Bedeutungen. In der historischen Sprachwissenschaft bezeichnet es eine Wortform, die rekonstruiert wurde, d. h. deren Aussehen aus verschiedenen Argumenten erschlossen werden kann, die aber nicht belegt ist (d. h. in keinem uns erhaltenen Text zu finden ist). Anderseits werden mit dem Stern Wortformen oder Sätze bezeichnet, die „ungrammatisch" sind oder abweichend erscheinen.

in der ganzen Ebene beschränkt. Durch die Wahl dieses Modus wird signalisiert, dass letztlich das Gegenteil wahr ist. Der Konjunktiv des Präteritums hat hier die Funktion eines Potentialis (*Wenn es noch schneit, könnte ich Schi fahren gehen*) oder eines Irrealis (*Wenn ich gesund wäre, könnte ich Schi fahren gehen*).

– Modale Konjunktionen (*indem, wie, ohne dass, ohne zu*):

  Diese Konjunktionen werden vor allem auf einer metasprachlichen Ebene verwendet: *Man beweist diesen Satz, indem man zuerst den Fall eines gleichseitigen Dreiecks untersucht. Man kann nichteuklidische Geometrie schwer verstehen, ohne dass man vorher euklidische Geometrie studiert hat. Dieses Dreieck sieht so aus, als ob es rechtwinkelig wäre.*

– Konzessive Konjunktionen (*obwohl, obgleich, ...),* temporale Konjunktionen (vorzeitig: *nachdem, seit(dem), als, wenn, als, während, sooft;* nachzeitig: *bevor, bis, ehe*) und konsekutive Konjunktionen (*so .. dass, so dass, zu ... als dass*):
  Diese finden in der Fachsprache wenig Verwendung. Aber sie kommen im Gespräch in der Klasse oft vor: *Obwohl ich viel gelernt habe, ist die Schularbeit danebengegangen. Obwohl das Problem leicht aussieht, ist es sehr schwierig.*

– Konjunktionaladverbien

  Eine besondere Gruppe sind die Konjunktionaladverbien, die wie Konjunktionen Sätze verknüpfen, sich aber syntaktisch wie Adverbien verhalten. Beispiele sind *deshalb, trotzdem, indessen.* Sie verknüpfen wie koordinierende Konjunktionen Hauptsätze, besetzen aber das „Vorfeld“ des Verbums, welches ja im Deutschen in Hauptsätzen an zweiter Stelle zu kommen hat: *Dieses Integral ist ein elliptisches Integral; deshalb kann es nicht elementar ausgewertet werden.* In der Umgangssprache hat *trotzdem* zum Teil die Funktion von *obwohl* übernommen.

c) Entstehung von Fachwörtern

Eine interessante historische und didaktische Fragestellung ist, wie es zum Aufbau eines „mathematischen Registers“ (siehe Kapitel 1.1) kommt. Im historischen Wandel der mathematischen Fachsprache wurden immer wieder neue Fachwörter gebildet. Dabei wird von verschiedenen Möglichkeiten der Wortbildung Gebrauch gemacht. Man unterscheidet in der Linguistik drei Arten von Wortbildungsprozessen: Zusammensetzung (Komposition), Entwicklung (Derivation) und Modifikation.

– Wortzusammensetzungen können bestehen aus zwei Substantiven (z. B. *Teilmenge*, *Vektorraum, Funktionsterm*) oder einem – evtl. die Bedeutung einschränkenden – Adjektiv und einem Substantiv (z. B. *gerade Zahl, komplexe Zahl, Obermenge*), aus Substantiv und Adjektiv (z. B. *teilerfremd*) oder aus zwei Adjektiven (z. B. *affin linear, gleichmäßig stetig*), aus zwei Verben (z. B. *drehstrecken*) oder einem Substantiv und einem Verb (z. B. *Wurzel ziehen, Gleichung lösen*).
  Bei der Wortzusammensetzung ist zu beachten, dass durch die Zusammensetzung verschiedenste semantische Rollen realisiert werden. Diese können etwa sein: Prädikat, z. B. bei *Quadratzahl* (eine Zahl, die Quadrat einer anderen Zahl ist); Instrument bzw. Art und Weise, z. B. *Dezimaldarstellung* (Zahlen werden durch Dezimalzahlen dargestellt); Zweck/Ziel, z. B. *Rechenregeln* (Regeln zum Rechnen) oder *Richtungsvektor* (zur Bezeichnung einer Richtung); Objekt, z. B. *Integralrechnung* (Integrale werden berechnet bzw. untersucht); Herkunft oder Herstellung, z. B. *Pyramidenstumpf* (dieser entsteht aus einer Pyramide) oder *Schnittpunkt* (dieser Punkt wird durch den Schnitt zweier Geraden festgelegt).
  Des Weiteren ist zu beachten, dass Zusammensetzungen bei Fachwörtern in der Regel spezifizierend sind. In diesem Fall kann das Simplex für das Kompositum eintreten: Eine *Deckabbildung* ist eine *Abbildung* (aber ein *Differentialquotient* ist in der klassischen Analysis kein *Quotient* und ein *Handschuh* kein *Schuh*).

– Wortableitung: Substantive können aus Verben abgeleitet werden (z. B. Division von dividieren), aber auch von Adjektiven (z. B. *Ebene* von eben, *Gerade* von gerade Linie oder *Variable* von variable Größe). Adjektive entwickeln sich aus Substantiven (z. B. *rechtwinkelig* oder *gleichschenkelig*) oder aus Verben (z. B. *differenzierbar*, *messbar*, *rektifizierbar*). Ein besonderer Fall sind die vielen Verben auf *-ieren* (z. B. *differenzieren* aus *Differenz, integrieren* aus *Integral, konvergieren* aus *Konvergenz).* Viele Fachwörter sind aus anderen Sprachen entlehnt, vor allem aus dem Lateinischen (z. B. *Subtraktion*, *Exponent*, *Volumen*) oder aus vorhandenem lexikalischen Material gebildet (z. B. *Homomorphismus* aus dem griechischen $o\mu o\varsigma$ für 'der gleiche' und $\mu o\rho\phi\eta$ für 'Gestalt').

– Die Modifikation erfolgt bei Substantiven meist mittels Affixe (z. B. *Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid*), bei Adjektiven durch Anfügen von Vor- oder Nachsilben (z. B. *differenzierbar, ungerade*) und bei Verben vor allem mittels Vorsilben (z. B. *ausklammern, ausmultiplizieren, auflösen*). Eine ältere Form der Modifikation von Verben ist etwa die Bildung *tränken* (=trinken lassen) zu *trinken*.

– Als eine besondere Form der Modifikation lässt sich die in der Mathematik sehr verbreitete Einführung von Abkürzungen auffassen (z. B. *sin*, *tan*, *log*, *ln*). Dabei gibt es drei Möglichkeiten: Die Abkürzung wird geschrieben, aber das Vollwort gesprochen: *usw.* gesprochen 'und-so-weiter', *tan* x gesprochen 'tangens-iks' die Abkürzung wird geschrieben und gesprochen (vor allem im mathematischen Jargon): *log* x, gesprochen 'log-iks' *UNO,* gesprochen 'u-no', oder die Abkürzung wird geschrieben, aber buchstabiert: *DNS,* gesprochen 'de-en-es', *ln* x, gesprochen 'el-en-iks'.

1.3.2 Fachliche Symbole

In der schriftlichen Darstellung ist die Verwendung zahlreicher Symbole typisch für die mathematische Fachsprache; sie sind als Abkürzungen für Fachwörter bzw. für mathematische Objekte, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen bzw. für logische Objekte und Beziehung aufzufassen. Dabei gibt es, und das erscheint typisch für mathematische Fachsprache, neben Konstanten auch Variablen.

a) Konstanten und Variablen

Konstanten sind Symbole, denen eine feste Bedeutung zugeordnet ist; d. h. sie stehen für bestimmte Objekte bzw. Objektklassen, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen. Man kann sie daher auch als Namen auffassen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Beispiele aufgelistet:

Symbol	gesprochen als
3	drei
$\frac{3}{4}$	drei Viertel
3,05	drei-Komma-null-fünf
π	pi
Q	rationale Zahlen
+	plus
$\sum$	Summe...
$\int$	Integral
<	ist kleiner als
$\cong$	ist kongruent zu

Symbol	gesprochen als
$\varnothing$	leere Menge
/	teilt
$\in$	ist Element von
$\subseteq$	ist Teilmenge von
$\cup$	vereinigt mit
$\neg$	nicht
$\vee$	oder
$\Rightarrow$	wenn..., dann
$\exists$	es gibt ein...
$\sqrt{\ }$	Wurzel aus ...

Variablen sind Zeichen ohne selbständige Bedeutung. Sie stehen nicht für bestimmte Objekte, Eigenschaften, Handlungen oder Beziehungen. Vielmehr sind sie einem Grund- oder Einsetzbereich (einer 'Grundmenge') von Objekten zugeordnet, dessen Elemente bei passender Gelegenheit an ihre Stelle gesetzt werden können. Somit können Variablen als Platzhalter für die Elemente einer Menge (bzw. einer Klasse) aufgefasst werden. Zunächst handelt es sich um Platzhalter für Zahlen, so dass der Begriff PRONUMERALE (in Anlehnung an den Begriff PRONOMEN, ein Wort, welches für ein Nomen stehen kann) sinnvoll erscheint. Die Einführung von Variablen ist ein schwieriges Problem der Didaktik der Algebra und die Frage, ob eine frühe Verwendung von Variablen sinnvoll ist, ist wohl noch nicht ausdiskutiert (zu diesem Thema siehe etwa MALLE 1993). Jedenfalls ist GALLIN & RUF (1993) zu folgen, die fordern, dass die Einführung von Variablen unter dem Aspekt „Abstraktion als befreiende Rationalisierung" zu geschehen habe.

Die um die Wende zum 20. Jahrhundert auftauchenden Probleme in den Grundlagen der Mathematik führten zu einer Unterscheidung zwischen Menge und Klasse, die vereinfacht wie folgt dargestellt werden kann: Eine Menge ist ein Objekt, auf welches die Axiome der Mengenlehre anwendbar sind. Für den Schulunterricht genügt es zu wissen, dass alle endlichen Mengen, die Zahlbereiche (**N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**), die geometrischen Räume (Ebene, Raum) und deren Teilmengen (Menge der Primzahlen; Geraden, Ellipsen,....) in diesem Sinn Mengen sind. Eine Klasse ist dagegen ein „uferloser" Bereich; es ist nicht absehbar, was alles dazugehört (z. B. die Klasse aller Mengen selbst ist keine Menge). Daher muss auch für jede in einem mathematischen Ausdruck oder Satz verwendete Variable festgelegt sein, welches ihr zugehöriger Grund- oder Einsetzbereich sein soll. Als Zeichen für Variablen benutzt man zumeist Buchstaben des lateinischen, gotischen oder griechischen Alphabets, seltener auch andere grafische Zeichen.

Variablen entsprechen somit in etwa den Pronomina im System einer natürlichen Sprache (diese Beobachtung findet sich bei SPERANZA 1989). Im Textstück *Die junge Frau vergaß ihre Tasche*. *Sie lag auf der Wiese*. kann sich das Pronomen *sie* grammatikalisch sowohl auf *die Frau* als auch auf *die Tasche* beziehen. Da es im Deutschen nur sehr wenige Pronomina gibt, ist es in alltagssprachlichen Texten unvermeidlich, die Pronomina ständig neu zu belegen. Betrachten wir das etwas längere Textstück: *Die junge Frau vergaß ihre Tasche. Sie lag auf der Wiese. Da sie ihren darin befindlichen Paß dringend brauchte, lief sie trotz des plötzlich einsetzenden Regens zu ihr zurück um sie zu holen*. Eine Übertragung in die Regeln des mathematischen Gebrauchs von Pronomina würde darauf bestehen müssen, die junge Frau etwa mit *X*, ihre Tasche mit *Y = Y(X)* und die Wiese mit *Z* zu bezeichnen, so dass wir erhalten könnten: *X vergaß Y(X). Y lag auf der Wiese. Da X den in Y befindlichen Paß von X dringend brauchte, lief X trotz des plötzlich einsetzenden Regens zu Z zurück um Y zu holen*. In mathematischen Texten sollten innerhalb eines Sinnabschnittes Symbole nur einwertig verwendet werden.

b) Bildung von Symbolen und Symbolsystemen

Der Gebrauch von Symbolen als Konstanten und Variablen in mathematischen Texten beschränkt sich nicht auf einzelne Zeichen verschiedener Alphabete. Vielmehr werden zumeist aus mehreren solchen Zeichen neue Zeichen (manchmal „Superzeichen" genannt) gebildet. Im Einzelnen werden z. B. verwendet:

- Tiefgestellte Zahlzeichen oder Buchstaben als Indizes zur Unterscheidung (möglicherweise) verschiedener Objekte bzw. Objektklassen, z. B. a_1, x_{23}, y_n;
- Andere Formen der Indizierung zum Unterscheiden von Objekten und Objektklassen, z. B. a', $\bar{b}$, $\tilde{g}$, $\vec{a}$, N_0^+;
- Hochgestellte Zahlzeichen oder Buchstaben zur Abkürzung von Produkten gleicher Faktoren bzw. zur Darstellung von Potenzen, z. B. a^5, x^m, r^{-3};
- Spezielle flächenhaft aufgebaute Symbolsysteme, wie z. B.

$$\frac{3}{4}, \sqrt{c}, \sqrt[5]{x}, \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}, |d|, \|y\|, \begin{vmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 6{,}2 & -4 \end{vmatrix}$$

In der Mathematik werden unter anderem folgende Darstellungsmittel zur Bildung neuer Symbole verwendet (PIMM 1987):

- Reihenfolge (17 ist verschieden von 71)
- Position (23 ist verschieden von 2^3)
- relative Größe (Indizes und Hochzahlen werden meist etwas kleiner geschrieben; $\cap$ steht für die binäre Operation Durchschnitt, aber $\bigcap$ für den Durchschnitt beliebig vieler Mengen)
- Orientierung ($\cap$ ist verschieden von $\cup$, $\supseteq$ ist verschieden von $\subseteq$)
- Wiederholung (f'(x) steht für die erste Ableitung, f''(x) für die zweite Ableitung einer Funktion).

Zahlzeichen, Operationssymbole und Klammern werden zu Graphemen („Schreibfiguren“) zusammengestellt, die oft auch Terme genannt werden. Terme können aber neben Konstanten auch Variablen enthalten. In der mathematischen Logik werden Terme meist durch rekursive Definition festgelegt. Für den Aufbau dieser Terme gelten syntaktische und ästhetische Regeln, auf die noch eingegangen werden wird. Die Verletzung syntaktischer Regeln gilt als Verstoß gegen die Norm, z. B. $(3x+4$ ist unzulässig, nur $(3x+4)$ ist erlaubt (d. h. eine geöffnete Klammer verlangt eine entsprechende Schließung).

Ästhetische Regeln haben eine geringere normative Kraft, aber die Qualität von mathematischen Textprogrammen und Druckwerken wird danach beurteilt. Benutzer mathematischer Textprogramme erleben dabei deutlich die große Flexibilität der raschen handschriftlichen Fixierung gegenüber dem Gebrauch eines Formeleditors oder der linearen Eingabe in ein System, welches die Grapheme befehlsgemäß aufbaut.

Eine wichtige Klasse von Termen sind die Polynome. Das Wort *Polynom* ist vermutlich aus griechisch $\pi o\lambda\upsilon\varsigma$ ‘viel’ und $\nu o\mu o\varsigma$ ‘Gesetz; Setzweise, Tonart’ abgeleitet, bedeutet also etwa das ‘vielgesetzte [Zeichen]’ ; die russische Lehnübersetzung *mnogoclen* zu *mnogo* ‘viel’ und c*len* ‘Glied’ zeigt dies deutlich.

Terme werden mittels Handlungs- bzw. Beziehungssymbolen wie $=$, $<$, $\equiv$, $\not\in$, $\subset$ zu Aussagen bzw. – im Fall von Variablentermen – zu Aussageformen verknüpft. Solche Syntagmen dienen nicht mehr – wie die Terme – der Bezeichnung von Objekten oder Objektklassen, sondern haben die Form von Sätzen.

Es gibt eine ‘formalistische’ Auffassung von Mathematik, in welcher Mathematik als syntaktisches ‘Spiel’ mit Termen angesehen wird. Die Verlässlichkeit von Rechenanlagen beruht auf dieser Möglichkeit, die weit über den numerischen Bereich hinaus schon weite Teile der elementaren Algebra und Analysis („Computeralgebra“) und der Logik („Automatisches Beweisen“) erfasst hat.

Die Reihenfolge in Symbolketten ist oft nur durch die inhaltliche Bedeutung bestimmt. Diese Reihenfolge kann der Sprechweise folgen:

$\sqrt{5}$ ‘Wurzel aus fünf’, a^2 ‘a-quadrat’, 3 + 4 = 7 ‘drei und vier ist sieben’, $\frac{4}{3}$ ‘vier Drittel’: gelesen von oben nach unten, 3^4 ‘drei hoch vier’: gelesen von unten nach oben, $\binom{n}{2}$ ‘n über zwei’: die Klammern werden als "über" gelesen. Gelegentlich folgt sie nicht der Sprechweise: $\int_0^1 x^2 dx$ ‘Integral x quadrat d x von Null bis Eins’.

Leider ist die Reihenfolge bei der rechnerischen Abarbeitung oder Eingabe in ein Rechengerät oft wieder anders (z. B. Reihenfolge der Tasten auf dem Rechner oder der Befehle bei symbolischer Algebra).

Dass die Reihenfolge der Quantoren kritisch sein kann, gehört zu den oftmals schmerzlichen Erfahrungen vieler Mathematikstudenten: *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$... Fehler können sich auch aus der Mehrdeutigkeit der Juxtaposition ergeben. Man vergleiche etwa:

28 – 8 = 20, $2\frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 2$ und $2x - x = x$.

Interpretiert man *subtrahieren* als *wegnehmen*, so wird im ersten Fall eine 8 weggenommen und durch 0 ersetzt, im zweiten Fall tatsächlich der Bruch $\frac{1}{7}$ entfernt, im dritten Fall aber die 2 getilgt (hier ist die Konvention $1 \cdot x = x$ nicht hilfreich, so dass eben Schüler nach dem Muster $2\frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 2$ auch $2x - x = 2$ rechnen).

DORMOLEN (1978) klassifiziert mathematische Symbole als visuelle und verbal-algebraische und charakterisiert den Unterschied zusammenfassend so (S. 67):

visuelle Symbole **z. B. geometrische Zeichnungen und Diagramme**	**verbal-algebraische Symbole** **z. B. Terme und Gleichungen**
heben räumliche Eigenschaften hervor	betonen nicht-räumliche Eigenschaften
sind schwer übertragbar	sind leichter übertragbar
wirken zusammenfassend, wodurch die Struktur sichtbar wird	wirken analysierend, wodurch Details betont werden
relevante Information erfolgt gleichzeitig	relevante Information wird zeitlich nacheinander gegeben
fördern intuitives Denken	fördern logisch-deduktives Denken

c) Konventionen und Grundsätze beim Gebrauch mathematischer Symbole

Die *Konventionalität sprachlicher Zeichen* ist in der Mathematik deutlich erkennbar. Mathematische Symbole können beliebig ausgetauscht werden, wenn die Kodierungsregeln vereinbart sind. Die Aussage

$$\frac{d\ sin\ x}{dx} = cos\ x$$

kann auch in der Form

$$sin'\ y = cos\ y$$

geschrieben werden. Trotz – oder vielleicht gerade wegen – der beschriebenen Freiheit, gibt es in der Mathematik aber auch eine recht große Bereitschaft, sich an Konventionen zu halten und, vor allem bei der Wahl von Symbolen, gewisse Regeln und Grundsätze zu befolgen. Dies hat praktische und didaktische Gründe: Eine ständige Veränderung von Bezeichnungen erschwert die Verständigung. Eine treffende und einheitliche Symbolik indes vermag Ähnlichkeiten aufzuhellen und das Gedächtnis zu entlasten. Beispiele für weit verbreitete Festlegungen sind

- π für die Kreiszahl, *e* für die Basis der natürlichen Logarithmen;
- **N**, **Z, Q**, **R** und **C** für die häufig auftretenden Zahlenmengen;
- die Verwendung von Kleinbuchstaben als Variablen für Zahlen;
- die Verwendung von ε und δ für „kleine“ Zahlen;
- die Verwendung der Relationszeichen $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, usw.
- die Bedeutung der Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sum$, $\prod$, des Wurzelsymbols $\sqrt{}$ und der logischen Zeichen $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ usw.;
- die Verwendung von Großbuchstaben für geometrische Punkte, der Buchstaben g und h für Geraden und griechischer Buchstaben für Winkel(größen),
- die Verwendung der Zeichen || für "parallel", ⊥ für "senkrecht", ∠ für "Winkel", ~ für "ähnlich", ≅ für "kongruent", ≡ für identisch, usw.

Solche Konventionen werden oft weltweit anerkannt und befolgt. Ähnliches gilt für die folgenden Prinzipien, die allerdings nur eine Orientierungshilfe sein können; eine genaue Zuordnung ist nicht sinnvoll, die Übergänge sind zumeist fließend.

– Serialisierung

Die vertrauteste Bezeichnung für eine "Unbekannte" ist x. Kommen mehrere Variablen vor, so werden, in der Reihenfolge des Alphabets, meist y und z gewählt. Reicht das nicht hin, so startet man eine neue Serie, etwa mit u, v, w. Man kann auch zu x_1, x_2, x_3, ... übergehen. Die Tatsache, dass die letzte Zahl einer Zählfolge zugleich die Anzahl liefert, würde eine Wahl von Variablen in einem Gleichungssystem mit drei Unbekannten wie x_2, x_3 , x_6 zumindest merkwürdig erscheinen lassen. Serialisierung mit variablen Indizes eröffnet zusätzliche Möglichkeiten: a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, ... Natürlich kann ein auf Serialisierung aufgebautes System durch bereits belegte Zeichen gestört werden. Das Zeichen π ist das Symbol für die Kreiszahl und man wird es in einem Text, wo Konstante vorkommen, meist nicht anderweitig verwenden. Gleichwohl sind in der Gruppentheorie π, ρ, σ, ... als Bezeichnungen für Permutationen üblich.

Serialisierung spielt auch bei der Wortbildung eine große Rolle. Die Folge der Bezeichnungen *Dreieck, Viereck, Fünfeck,* .... ist produktiv und gestattet es, von einem *n-Eck* zu sprechen. Die Bezeichnungen *Homomorphismus, Isomorphismus* und *Homöomorphismus* haben die weiteren Bezeichnungen *Epimorphismus* und *Monomorphismus* und letztlich das Wort *Morphismus* produziert.

Serialisierungen sind gerade am Anfang oft unregelmäßig. Die Ableitung der Ordnungszahlwörter und Bruchzahlen enthält zumeist am Anfang einige Störungen: *erster* (zu *eins*), *zweiter* (zu *zwei)*, *dritter* (zu *drei*), *vierter* (zu *vier)*,... Brüche mit dem Nenner *eins* werden gelegentlich als *Eintel* bezeichnet, was wohl von *n-tel* (*n-ter Teil*) abgeleitet ist. Zum Nenner *zwei* gehört jedoch *halb*. Ab dann erfolgt eine systematische Herleitung aus den Ordnungszahlwörtern nach dem Muster *n-tel*, wie *Drittel, Viertel, Fünftel,* ....

Die *Serialisierung* entlastet das Gedächtnis, da sie auf vorgeformte Reihenbildungen zurückgreift. Sie erhöht auch die Lesbarkeit eines Textes, indem sie semantische Konfigurationen schafft, die die Interpretation nachfolgender Textteile erleichtern können ("advanced organizer"). Wenn etwa in einem Text von einem Vektorraum V die Rede ist und man plötzlich auf ein W stößt, so wird man zu Recht darin einen weiteren Vektorraum vermuten. Werden in einem Text stetige Funktionen mit f und g bezeichnet, so wird man für eine weitere Funktion die Bezeichnung h wählen.

– Gleichartigkeit der Konfiguration und alphabetische Korrespondenz

Eine Nummerierung gleichartiger Objekte mit x_1, x^2, ... also eine Mischung hoch- und tiefgestellter Indizes wird in der Regel nicht vorgenommen; auch keine Mischung verschiedener Alphabete oder Typen, wie etwa x, Y,.... Natürlich kann dieses Prinzip durch andere Prinzipien durchbrochen werden, wie etwa die Schreibweise $s = \sigma + \mathrm{i}t$ für die komplexe Variable in der analytischen Zahlentheorie zeigt. Hier hat das Prinzip der alphabetischen Korrespondenz gesiegt: σ ist der Realteil von s, so wie etwa sehr oft $\alpha = a + \mathrm{i}b$, $\gamma = c + \mathrm{i}d$, ... verwendet wird, wo α und a, γ und c alphabetisch korrespondieren. Die Eckpunkte eines Dreiecks werden meist mit A, B, C bezeichnet, die gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c, die Winkel mit α, β, γ. Diese Reihenfolge ist übrigens uraltes Kulturgut. Das hebräische Alphabet beginnt mit alef, beth, gimel. Die Reihenfolge a, b, c spiegelt die Tatsache wieder, dass lateinisch c ursprünglich in allen Positionen ähnlich wie k gesprochen wurde. Auch die Reihenfolge k, l, m, n hat Jahrtausende überstanden: κ, λ, μ, ν, arabisch kâf, lâm, mîm, nûn ...

Besonders eindrucksvoll wird die alphabetische Korrespondenz in Verbindung mit diakritischen Zeichen ausgenutzt: Die Ableitung der Funktion f wird meist mit f' bezeichnet; die Ableitungsregel $(fg)' = f'g + fg'$ ist durch diese Korrespondenz prägnant und leicht merkbar. Übrigens wird die Stammfunktion von f meist mit F

bezeichnet. Der Dualraum des Vektorraumes *V* wird mit *V**, die Dualgruppe einer Gruppe G mit Ĝ bezeichnet usw.

Die alphabetische Korrespondenz hat in jüngster Zeit zur Entwicklung neuer Sonderzeichen Anlass gegeben. Bekanntlich wird die Summe zweier Zahlen durch das Pluszeichen + ausgedrückt, ebenso das Produkt durch das Malzeichen x oder den Malpunkt · (oder durch Juxtaposition, d. h. bloßes Nebeneinanderstellen wie etwa *2a*). Für die Summe beliebig vieler Summanden verwendet man ein großes Sigma $\sum$ – sigma wie **S**umme –, für das Produkt beliebig vieler Faktoren ein großes Pi Π – pi wie **P**rodukt. (In ähnlicher Weise werden oft die Anfangsbuchstaben als Eingabebefehle für den Computer benutzt: F steht für **F**ormatieren, H für **H**ilfe (d. h. das Aufrufen hilfreicher Informationen). Das Zeichen ∂ ist als stilistische Variante des Buchstabens *d* in Verbindung mit partiellen Ableitungen zum mathematischen Sonderzeichen geworden. Auch das Integralzeichen $\int$ war ein *S* (für Summe) und soll aus der Handschrift von Leibniz entnommen sein. (Man sieht: Es gibt also sogar bewahrte persönliche Stilmerkmale.) Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen werden durch die Zeichen $\cap$ und $\cup$ ausgedrückt; für Durchschnitt und Vereinigung beliebig vieler Mengen verwendet man dieselben Zeichen im Großformat: $\bigcap$ und $\bigcup$

– <u>Symmetrie und Dualität</u>

Die Symmetrie ist eine besondere Form der Korrespondenz. Diese kann eine paarweise Entsprechung sein: Das Bild einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ wird meist mit $w = u + \mathrm{i}v$ bezeichnet. Kovariante Größen werden in der Tensorrechnung mit tiefgestellten Indizes, kontravariante Größen mit hochgestellten Indizes bezeichnet. Den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots$ entsprechen die Differentiale *dx, dy,* ... Eine einfache Symmetrie tritt uns bei der Verwendung von Klammern entgegen: (...), [...] und {...}. Das Fehlen einer Klammer verletzt das Stilgefühl, obwohl das Schließen einer Klammer nur bedingt notwendig ist: Im Ausdruck $a\ (b\ - c)$ ist das Schließen für die korrekte Interpretation wichtig (keineswegs notwendig, wenn entsprechende Vereinbarungen getroffen werden, wie etwa die umgekehrte polnische Notation *a b c* - * für denselben Ausdruck zeigt). Auch die Mischung von Klammern wird als störend empfunden. Viele werden die Formel $a\ (b\ - c] = ab - ac$ als „unschön“ empfinden. Der Ausdruck $y = F(\mathrm{x})$ ist bloß konventioneller als $y = F(\mathrm{x}$. Man könnte ja vereinbaren: Die runde Klammer, geschrieben (, bedeutet das Wörtchen "von" in der üblichen Lesart „ypsilon ist gleich groß-ef von iks". Ein bloßes Empfinden für Symmetrie ist es wohl, das den Bruch $\frac{x+2}{x+4}$ gegenüber etwa $\frac{x+2}{4+x}$ bevorzugt.

Gerade in mathematischen Druckwerken kann man Beispiele sorgfältiger graphischer Gestaltung finden. Die Vorliebe für eine ansprechende Gestaltung eines Textes hat zur Verbreitung leistungsfähiger Schreibprogramme beigetragen.

Auch in der Wortbildung spielt die Symmetrie eine große Rolle, besonders in der Form der Zuordnung mit Hilfe von Vorsilben. Zu *Sinus* wird *Kosinus*, zu *Tangens* das Wort *Kotangens* gebildet. Diese Wortbildung reflektiert den mathematischen Zusammenhang: $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ und $\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, also *cosinus* bedeutet *complementi sinus,* d. h. Sinuswert des komplementären Winkels. Die Symmetrie liegt nun darin, dass diese Zuordnung involutorisch ist: Die erneute Anwendung führt auf den ursprünglichen Begriff zurück: Das nicht existierende Wort *Ko-kosinus* ist nach der eben gegebenen Regel tatsächlich gleich dem *Sinus*. Diese involutorische Eigenschaft der Vorsilbe *ko-/co-* hat sich in der modernen Mathematik verselbständigt: Das *Koprodukt* ist das duale Objekt zum *Produkt*. Allerdings können ähnliche Wortbildungen auch andere paarweise Zuordnungen bilden. In der Tensorrechnung unterscheidet man *kovariante* und *kontravariante* Größen; das Wort *variant* gibt es gar nicht. Die *Kodimension* eines Unterraumes *U* eines Vektorraumes *V* ist die Dimension des Faktorraumes *V/U* (d. h. *codim U = dim V/U*). Hier ist die Beziehung *dim U + codim U = dim V* für diese Bezeichnung Pate gestanden. "Zufällig" ist *Tangens* auch der Kehrwert des *Kotangens* und die Zuordnung $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist ebenfalls involutorisch.

– Wohlgeformtheit

Die Syntax mathematischer Texte gehorcht dem Prinzip der Wohlgeformtheit in ähnlicher Weise wie es Texte einer natürlichen Sprache tun. Dabei ist diese Wohlgeformtheit, bzw. die Abweichung davon natürlich nur relativ zu den Konventionen einer Sprachgemeinschaft (oder den Regeln einer präskriptiven Grammatik) zu sehen. Für die gute Beherrschung einer Sprache kann die richtig gefällte Entscheidung über die Wohlgeformtheit eines Satzes als Kriterium dienen. Als Beispiele kann die Verletzung von Kongruenzregeln, Schließungsregeln und Stellungsregeln dienen: Die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

erfüllt die Kongruenzregel, dass die Variable *k* in der Summe mindestens zweimal vorkommen sollte. Die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

erfüllt diese Regel nicht (oder sie ist falsch). Die Stellungsregeln sind im Syntagma $a + b = c$ richtig, aber in $ab + c =$ falsch angewandt (sofern diese Syntagmen "vollständigen" Sätzen entsprechen). Eine Schließungsregel würde den "unvollständigen" Ausdruck $\int f(x)$ zum "vollständigen" Ausdruck $\int f(x)\, dx$ ergänzen.

Auch der Gebrauch einer gebundenen Variablen als freie Variable in einem Syntagma ist inkorrekt: Die Schreibweise $\int \sin x\, dx = - \cos x$ verletzt diese Bedingung (wird aber als "abus de langage" oft geduldet). Gebundene Variable dürfen natürlich in einem Text in mehreren Syntagmen vorkommen:
Die Formeln $\int \sin x\, dx = \cos y + C$ und $\int \frac{1}{x}\, dx = \log y + C$ können bequem nebeneinander stehen, obwohl das *x* in beiden Formeln gar nicht genau dieselbe Bedeutung haben kann (denn im zweiten Fall ist etwa $x = 0$ ausgeschlossen!).

– Konfiguralität

Das Merkmal der Beachtung von "guten" Konfigurationen, ein Konfiguralitätsprinzip ist sowohl für das Merken mathematischer Formeln als auch für die Heuristik und das analoge Schließen von Bedeutung. Wenn ein mathematischer Begriff als *Produkt* bezeichnet wird, so erwartet man eine formale Ähnlichkeit in der Schreibweise und die Sinnhaftigkeit gewisser Fragestellungen (wie etwa: Ist dieses Produkt kommutativ? assoziativ? Gibt es ein neutrales Element?). Entscheidend ist, dass diese Fragen sinnvoll gestellt werden können, nicht, dass die Antworten gleichartig oder in gewohnter Weise ausfallen. Produkte sind in der Regel binäre Operationen: Zwei Objekten einer gewissen Kategorie wird ein Objekt derselben Kategorie zugeordnet.

Ein weiteres Beispiel ist die Exponentialschreibweise. Ein neues Objekt, welches in der Form a^b geschrieben wird, soll möglichst eine Regel der Art $(a^b)^c = a^{b.c}$ erfüllen. Führt man für die Menge aller Abbildungen von *B* nach *A* die Bezeichnung A^B ein, so gilt (nach geeigneter Identifikation) tatsächlich: $(A^B)^C = A^{B\,3\,C}$.

Die Suche nach Formeln dieser Art, sogenannten Exponentialgesetzen, war für die Entwicklung der modernen Mathematik wichtig; meist ging es darum, das "richtige" Produkt zu finden, um dieses Gesetz zu verallgemeinern.

Die Bezeichnung *Differentialquotient* für die Ableitung einer Funktion zusammen mit der Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ ist für die Herleitung der richtigen Formel $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ ("Kettenregel") suggestiv, obwohl der Differentialquotient (zumindest außerhalb der Non-Standard-Analysis) gar kein Quotient ist.

Führt man zentrische Streckungen mit dem Faktor σ durch, so verändern sich Längen um den Faktor $\sigma = \sigma^1$, Flächeninhalte aber um den Faktor σ^2 und Rauminhalte um den Faktor σ^3. Die Exponenten ^{1}, ^{2}, ^{3} entsprechen den anschaulichen Dimensionen der gemessenen Objekte: Strecken sind eindimensional, Flächen zweidimensional und Körper dreidimensional. Sollte es tatsächlich Objekte der Dimension *g* geben, so müßte eine analoge Messung den Faktor σ^g liefern, dabei müsste *g* vielleicht nicht einmal mehr eine ganze Zahl sein. Die in letzter Zeit ausführlich untersuchten Fraktale sind nun tatsächlich geometrische Objekte mit nichtganzzahliger Dimension.

Schon die Griechen haben sich mit figurierten Zahlen beschäftigt, Zahlen, die entstehen, wenn man mit kleinen Steinchen (*ψηφοι*, lat. *calculi)* Figuren, wie Dreiecke, Quadrate, Fünfecke, ... legt und die Anzahl der verwendeten Steinchen zählt. Eine weitere wunderschöne Konfiguration ist das Pascalsche Dreieck, welches die Koeffizienten in der Entwicklung von $(1 + x)^n$ beschreibt.

1.4 Zur Syntax und Semantik der mathematischen Fachsprache

Syntax (griechisch: συνταξις ‘Zusammenstellung’) ist die Beschreibung der Bildung von Sätzen und Satzteilen. Wie schon einmal bemerkt, ist die Syntaxtheorie ein Kerngebiet der Sprachwissenschaft und nirgends wechseln so schnell die theoretischen Modelle wie dort. Auch *Chomsky* hat wiederholt seine theoretischen Positionen revidiert. Der Gegenstand ist erstaunlich schwierig (umso bemerkenswerter ist ja, dass Kinder ihre Muttersprache so erstaunlich perfekt lernen!). Für die folgenden Überlegungen sollen traditionelle Modelle genügen, wie sie nach wie vor Basis der meisten Beschreibungen der deutschen Sprache sind, aber auch im Fremdsprachenunterricht verwendet werden. Bescheidene Ansätze in Richtung Transformationsgrammatik sind im Anhang über formale Sprachen, Automaten, Fraktale dargestellt. Die Semantik beschäftigt sich mit dem Bedeutungsgehalt von Sprache. Nachfolgend sollen einschlägige Überlegungen zu beiden Aspekten der Sprachwissenschaft auf die mathematische Fachsprache bezogen werden.

1.4.1 Zur Syntax

Der elementare Gegenstand syntaktischer Betrachtung ist der Satz. Ein einfacher Satz besteht aus mehreren, in der Regel aus mindestens zwei Bausteinen: Subjekt und Prädikat. Diese Begriffe sind eher traditionelle Terminologie und in der neueren Sprachwissenschaft inzwischen Gegenstand vieler Diskussionen geworden. Dennoch wird niemand Mühe haben, in Sätzen wie *Die Dreieckshöhen schneiden sich in einem Punkt. Dreiecke mit paarweise gleich langen Seiten sind kongruent.* die Subjekte *die Dreieckshöhen* bzw. *Dreiecke*, die Prädikate *schneiden sich* bzw. *sind kongruent* sowie die peripheren Satzglieder *in einem Punkt* bzw. *mit paarweise gleich langen Seiten* zu identifizieren. Lässt man die peripheren Satzglieder weg, so bleibt zumindest theoretisch ein vollständiger Satz: *Die Dreieckshöhen schneiden sich* bzw. *Dreiecke sind kongruent.*

Im Deutschen steht das Subjekt, wie in den genannten Beispielen, zumeist im Nominativ. Es kann aber auch im Dativ oder im Akkusativ stehen: *Mir ist kalt*. *Mich friert*. Prädikate sind Verben oder Konstruktionen mit Hilfsverben.

a) Verben

Zeitwörter (Verben) sind mit Funktionen in mehreren Variablen zu vergleichen. Sie haben unterschiedlich viele Leerstellen. Die Anzahl der Leerstellen heißt Valenz oder Wertigkeit (der Vergleich mit dem gleichlautenden

Begriff der Chemie ist durchaus angebracht). Intransitive Verben haben nur eine Leerstelle, die für das Subjekt offen ist: *Die Folge konvergiert (gegen 2)*. Transitive Verben haben zwei Leerstellen, für Subjekt und Objekt, wobei das Objekt zumeist im Akkusativ steht: *Die Gerade schneidet den Kreis.* Aber auch Dativ ist möglich: *Jedem x-Wert entspricht genau ein y-Wert.* (In der Alltagssprache gelegentlich auch Genitiv: *Wir gedenken der Toten.*)

Eine eigentümliche Syntax hat die Wendung *es gibt*. Das Wörtchen *es* füllt formal die Subjektsposition aus. Das logische Subjekt steht hingegen im Akkusativ: *Es gibt einen algebraisch abgeschlossenen Körper.* Verwendet man das Verbum existieren, so steht das logische Subjekt im Nominativ: *Es existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

Auch Hauptwörter können eine Valenz haben, d. h. eine Ergänzung verlangen, wie etwa Verwandtschaftsbezeichnungen. Der Satz **Die Gerade g ist eine Senkrechte* erscheint wegen der fehlenden Ergänzung ‘Senkrechte wozu?’ merkwürdig und unvollständig; hingegen gilt *Die Gerade g ist Senkrechte zur Geraden h* als vollständiger Satz. In mathematischen Texten beschreiben sie zumeist zweistellige Relationen: *x ist Element der Menge X.* oder *A ist Teilmenge von B.*

Schreibt man, wie in der Mathematik üblich, zweistellige Relationen in der Form $R(x, y)$ oder xRy, so sind x und y syntaktisch gleichberechtigt (das heißt nicht, dass die Relation symmetrisch ist!). Im Deutschen wird aber nur eine der beiden Positionen in die Subjektsposition gesetzt. So erscheint in den nachstehenden Sätzen

$x = y$ *(x ist gleich y)*
$x < y$ *(x ist kleiner als y)*
$x \approx y$ *(x ist äquivalent zu y)*
$x | y$ *(x teilt y)*
$X \in g$ *(X liegt auf g)*

jeweils x als Subjekt. Dies wird deutlicher, wenn man entsprechende Hauptwörter einsetzt. *Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms.* (Die Position von y ist Ergänzung zu *gleich* im Dativ.) *Jeder Winkel ist kleiner als* 90^0. (Die Position von y ist Ergänzung zu *kleiner als* im Nominativ.) *Dieser Term ist äquivalent zu* 48*.* (Die Position von y ist Ergänzung zu *äquivalent zu* im Dativ.) *Eine Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume.* (Die Position von y ist Ergänzung zu *teilen* im Akkusativ.) *Der Punkt liegt auf der Geraden.* (Die Position von g ist eine Ortsangabe im Dativ.)
Natürlich kann man auch y in die Subjektsposition setzen, aber dies erfordert in der Regel einige Umformulierungen: *y ist gleich x. y ist größer als x. y ist äquivalent zu x. y wird von x geteilt.* (*die Gerade*) *g enthält* (*den Punkt*) *X.*

b) Verwendung der Hilfsverben sein und werden

Eine vielseitige Verwendung haben die Verben *sein* und *werden. Sein* wird als Hilfszeitwort zur Bildung der zusammengesetzten Formen der Vergangenheit verwendet: *Der Lehrer ist schon nach Hause gegangen*. Die häufigste Verwendung ist jedoch die als Kopula, d. h. als Bindeglied zwischen dem Subjekt und einem Prädikat: *Ein Rhombus ist ein Viereck, dessen Seiten gleiche Länge haben. Ein Trapez ist ein Viereck. Ein Dreieck ist durch die Angabe der Seitenlängen bestimmt*. (In diesem Satz kann die Wendung *ist ... bestimmt* als Zustandspassiv gedeutet werden und dann wird das Wörtchen *ist* als Hilfszeitwort angesehen.)

Die Bedeutungsunterschiede in der Verwendung von *ist* in diesen Sätzen können nur angedeutet werden. Durch die Kopula wird eine auf das Subjekt zutreffende Eigenschaft signalisiert. Ist daher E die Menge aller Objekte, für welche die Eigenschaft e zutrifft, so kann man diese Sätze durch die Symbolkette $x \in E$ beschreiben. *Ein Rhombus gehört zur Menge der Vierecke, dessen Seiten gleiche Länge haben. Ein Trapez gehört zur Menge der Vierecke. Das Dreieck gehört zur Menge der Figuren, die durch die Angabe der Seitenlängen bestimmt sind*. In der Hochkonjunktur der Strukturmathematik waren umständliche Sätze wie 4 *ist ein Element der Menge der geraden Zahlen* statt des schlichten Satzes 4 *ist eine gerade Zahl* üblich.

Wichtig ist der Fall, wo E nur ein Element hat wie im Satz *Ein Rhombus gehört zur Menge der Vierecke, dessen Seiten gleiche Länge haben.* Dieser Fall kann und muss nötigenfalls signalisiert werden. Dies kann geschehen durch ein vorangestelltes Signal wie *Wir definieren nun: Ein Rhombus ist ein Viereck, dessen Seiten gleiche Länge haben.* Oder durch die Einfügung von *gleich*: *Ein Rhombus ist gleich einem Viereck, dessen Seiten gleiche Länge haben.* Oder man verwendet ein Verbum wie *nennen*: *Ein Viereck, dessen Seiten gleiche Länge haben, wird Rhombus genannt.* In vielen Fällen wird ein gleitender Übergang zur Verwendung als „Vollverb" in der Bedeutung DASEIN oder EXISTIEREN sichtbar: *Da ist der Schnittpunkt. Es ist eine Tangente vorhanden.* Man kann in diesen Fällen stets eine Paraphrase verwenden, etwa: *Da liegt der Schnittpunkt. Es existiert eine Tangente.*

Das Verbum *werden* tritt als Hilfszeitwort auf zur Umschreibung des Futurs und zur Bildung des Passivs auf: *Ein Viereck mit gleich langen Seiten wird Rhombus oder Raute genannt. Ein Dreieck wird durch die Angabe der Seitenlängen bestimmt*. Dies ist ein so genanntes Vorgangspassiv. Das Zustandspassiv *Ein Dreieck ist durch die Angabe der Seitenlängen bestimmt* vermittelt den Eindruck des eher Zeitlosen, im Vorgangspassiv kommt das Geschehen – in diesem Fall etwa die Möglichkeit einer Konstruktion – stärker zum Ausdruck.

In mathematischen Texten wird auch das Verbum *haben* sehr oft verwendet. Als Hilfszeitwort dient es ebenfalls zur Bildung der analytischen Vergangenheitszeiten: *Georg Cantor hat die moderne Mengenlehre begründet.* Als „Vollverb" bezeichnet es den Besitz oder die Zugehörigkeit. In diesem Fall kann man problemlos das Verbum *besitzen* substituieren: *Dieses Polynom hat eine Nullstelle.* (Man sagt aber auch, wie in der Alltagssprache: *Dieses Polynom besitzt eine Nullstelle.*)

c) Weitere syntaktische Besonderheiten

Eine Besonderheit der mathematischen Sprache (im Deutschen!) ist das häufige Auftreten von Nominalisierungen. Dabei werden Kasuszuweisungen verändert und das Agens kann getilgt werden, oder muss in einen anderen Kasus gesetzt werden (bzw. kann das Agens sogar durch ein besitzanzeigendes Adjektiv ersetzt werden). Man vergleiche: *Wir messen die Länge*. *Die Messung der Länge* (wer misst?). *Unsere Messung der Länge* ... Kommt es dann zu Verschachtelungen (z. B. rekursiver Einbettung), so wird es noch schwieriger: *Die Reihenfolge der Verknüpfung zweier Spiegelungen*...

Häufiger als in der Umgangssprache wird das Passiv verwendet. Auch hier ist das Agens meist unwichtig: *Ein Viereck mit gleich langen Seiten wird Rhombus genannt* ... (von wem?). Dies mag mit der Sonderstellung des sogenannten "irreversiblen" Passivs zusammenhängen; dies ist ein Passivsatz, bei dem ein Austausch des Agens mit dem betroffenen Subjekt semantisch nicht plausibel erscheint: *Von vielen Mathematikern wird der direkte Beweis bevorzugt*. **Vom Beweis werden viele Mathematiker bevorzugt.*

Sehr häufig treten unpersönliche Wendungen auf: *es ist üblich,...zu nennen. – man setzt... – man bezeichnet*.... Dies wird oft auch mit "wir" umschrieben: *wir definieren* (Wer ist "wir"?). Dies soll Teilnahme am Geschehen suggerieren.

Ein Unterschied zwischen Alltagssprache und schriftlichen mathematischen Texten ist die Verwendung von Klammern (und Satzzeichen) zur Gliederung von Aussagen. In der Alltagssprache kommen keine Klammern vor, vielmehr müssen gedachte Klammern d. h. die Struktur des Textes durch andere Hilfsmittel wie Intonation, Pausen oder grammatische Hilfsmittel mitgeteilt werden. Aus dem Kontext ergibt sich etwa, dass der Ausdruck *heiße Würstchen und Limonade* im Sommer (*heiße Würstchen*) *und Limonade* bedeutet, d. h. die Limonade sollte nicht heiß sein. Im Winter wäre aber eine Lesart *heiße* (*Würstchen und Getränke*) denkbar. Der Ausdruck *heiße Würstchen und Bier* kann nicht als *heiße* (*Würstchen und Bier*) verstanden werden, da es dann korrekter *heiße Würstchen und heißes Bier* lauten müsste. Den Ausdruck *reife Äpfel und Birnen* wird man eher als *reife* (*Äpfel* *und Birnen*) lesen, in der umgekehrten Reihenfolge *Birnen und reife Äpfel* wird nahegelegt, dass die Birnen nicht unbedingt reif sind.

In der Arithmetik und Algebra werden Klammern verwendet um die eindeutige Abarbeitung von Rechenoperationen in der konventionellen Schreibweise sicherzustellen:
$(3 \cdot 4) + 1 = 13$, aber $3 \cdot (4 + 1) = 15$. Eine dem Distributivgesetz ähnliche Vorgangsweise kann man im Weglassen koreferentieller Wörter (bei zusammengesetzten Wörtern) oder koreferentieller Satzglieder (bei Satzverbindungen) erblicken. Beispiele:

- *Haupt- und Mittelschulen = Hauptschulen und Mittelschulen*
- *Der Lehrer verteilt die Hefte und sammelt sie nach der Klassenarbeit wieder ein = Der Lehrer verteilt die Hefte und der Lehrer sammelt sie nach der Klassenarbeit wieder ein.*

Eine derartige Verkürzung ist bei Objekten nicht möglich; dort muss zumindest ein anaphorisches Pronomen gesetzt werden:

**Die Schüler kennen das Problem und lösen = Die Schüler kennen das Problem und lösen es = Die Schüler kennen das Problem und lösen das Problem = Die Schüler kennen und lösen das Problem.*

Aus ökonomischen Gründen können bei Produkten Klammern weggelassen werden:

$3 \cdot 4 + 1 = 13$. Es ist aber möglich, Bezeichnungsweisen zu erfinden, in denen für diesen Zweck keine Klammern gebraucht werden (sogenannte „polnische Notation“, da sie von Logikern in Polen propagiert wurden). Nimmt man etwa α für Addition und μ für Multiplikation, so lassen sich $(3 \cdot 4) + 1$ in der Form $34\mu1\alpha$ und $3 \cdot (4 + 1)$ in der Form $341\alpha\mu$ klammerfrei schreiben (natürlich würde man Klammern brauchen, wenn man mehrstellige Zahlen verwendet).
Die Verwendung von Klammern in der Funktionsschreibweise, also $y = f(x)$ ist zwar traditionell, aber in vielen Fällen werden auch keine Klammern geschrieben: y = sin x, y = e^x,... In der universitären Mathematik notiert man ohnedies Abbildungen meist ohne Klammern: $y = Tx, y = \psi x$.

1.4.2 Syntaktische Transformationen

In jeder Sprache werden durch syntaktische Transformationen aus Sätzen neue Sätze abgeleitet, deren Bedeutung mit der Bedeutung des ursprünglichen Satzes in engem Zusammenhang steht. Wir werden auf folgende Transformationen kurz eingehen: Passiv, Frage und Negation.

a) Passiv

Der viel besprochene Mustersatz *Der Hund biss den Mann* wird durch die sogenannte Passivtransformation in den Satz *Der Mann wurde vom Hund gebissen* umgeformt. Zunächst scheint es so, als ob ein Satz und der daraus durch Passivierung entstandene Satz gleiche Bedeutung haben. Schon bei etwas genauerem Zusehen erkennt man, dass oft kleinere semantische oder stilistische Unterschiede eine Rolle spielen. Tatsächlich sind aber in vielen Sätzen Quantoren verborgen, deren Existenz durch die Passivtransformation offenkundig wird, da der ins Passiv gesetzte Satz eine andere Bedeutung haben kann. Man denke etwa an (1) *Biber bauen Dämme* und (2) *Dämme werden von Bibern gebaut.* Der Satz (1) bedeutet (1a) *Alle Biber bauen Dämme.* Der Satz (2) wird analog interpretiert als (2a) *Alle Dämme werden von Bibern gebaut* und dies bedeutet etwas anderes. Transformiert man die „genauere“ Version (1a) ins Passiv, erhält man (2b) *Dämme werden von allen Bibern gebaut.* Dieser Satz erscheint auf eine merkwürdige Art mehrdeutig. Er lässt sich als semantisches Äquivalent zu (1a) interpretiert, kann aber auch bedeuten, dass beim Dammbau alle Biber zusammenhelfen, etc. Eine weitere Möglichkeit wird durch die Einfügung von „Heckenwörtern“ geboten, die Quantoren blockieren: (2c) *Dämme werden auch von Bibern gebaut.* [Hier blockiert die Einfügung des Wortes *auch* die Lesart *alle Dämme*.]

Man vergleiche weiterhin den Aktivsatz (3) *Jeder ebene Schnitt eines Drehkegels erzeugt einen Kegelschnitt.* mit dem Passivsatz (4) *Ein Kegelschnitt wird von jedem ebenen Schnitt eines Drehkegels erzeugt.* Es ist klar, dass (4) eine andere Bedeutung hat als (3). In beiden Fällen liegt ein zweistelliges Prädikat *R(x,y)* zugrunde. Der Satz (3) hat die Bedeutung $\forall x \exists y{:}\, R(x,y)$ − *Für alle x gibt es ein y, so dass ...* − hingegen hat (4) die Bedeutung $\exists y \forall x{:}\, R(x,y)$ − *Es gibt ein y, so dass für jedes x gilt, ...*. Interessant ist nun aber, dass man die beiden Sätze durch die Verwendung des unbestimmten Artikels abändern kann und sodann die Passivtransformation die (richtige!) äquivalente Bedeutung beibehält: (3a) *Ein ebener Schnitt eines Drehkegels erzeugt einen Kegelschnitt.* (4a) *Ein Kegelschnitt wird von einem ebenen Schnitt eines Drehkegels erzeugt.*

Syntaktisch gesehen hat die Passivtransformation mehrere Aufgaben. Eine davon ist es, Sätze zu koordinieren und dabei koreferentielle Satzglieder zu tilgen. Eine weitere Aufgabe besteht in der Möglichkeit, das handelnde Subjekt wegzulassen. Der Satz **biss den Mann* ist ungrammatisch, aber der Satz *Der Mann wurde gebissen* ist korrekt. Dies mag ein Grund sein, wieso in der mathematischen Fachsprache des Deutschen das Passiv viel verwendet wird. *Der Satz von Pythagoras kann auf viele Arten bewiesen werden* (von wem? − dies scheint nicht so wichtig). *Ein Viereck, dessen Seiten gleiche Länge haben, wird Rhombus oder Raute genannt* (von wem wohl?). Schließlich scheint das Passiv den mathematischen Sätzen deutlicher den Charakter der verbindlichen Norm und der Allgemeingültigkeit zu geben: *Es ist zu zeigen, dass ...* (im Vergleich zu: *Man muss zeigen, dass ...*), *Im Dreieck wird die Höhe durch die Mittellinie halbiert*.

b) Negation

Die Verneinung eines Satzes kann auf verschiedene Arten interpretiert werden. Verneinung bedeutet nämlich syntaktisch die Montage eines verneinenden Ausdrucks an einer bestimmten Stelle.
(I.0) *Die Gerade schneidet den Kreis.*
(I.1) *Die Gerade schneidet den Kreis nicht*.
(I.2) *Nicht die Gerade schneidet den Kreis* (sondern der zweite Kreis).
(I.3) *Die Gerade schneidet nicht den Kreis* (sondern das Dreieck).

Verneinung ist ein Merkmal, welches zunächst dem ganzen Satz zukommt. Für den Mathematiker ist der Satz (I.1) zunächst die Negation von (I.0) und hat den entgegengesetzten Wahrheitswert von (I.0). Die Verneinung kann aber zu verschiedenen Satzgliedern wandern und so verschiedene semantische Wirkungen haben. Wohin die Verneinung gewandert ist, kann auch durch Betonung oder verstärkende Partikel bzw. klärende Nebensätze ersichtlich gemacht werden. Syntaktisch kann die Stelle aus dem Vergleich mit dem entsprechenden Fragesatz erschlossen werden.

Dies erklärt auch, warum doppelte Verneinung nicht unbedingt im Sinne der mathematischen Logik als Bejahung interpretiert werden muss. Im Deutschen ist doppelte Verneinung nur umgangssprachlich möglich, während sie in manchen anderen Sprachen üblich ist, wie etwa im Russischen oder im Spanischen: *V komnate ja nikogo ne videl* ‘Ich habe im Zimmer niemanden gesehen’. *No he dicho nada.* ‘Ich habe nichts gesagt.’

Im Allgemeinen wird die Verneinung in der Nähe des Prädikats montiert, wobei im Deutschen die strikte Regel zu beachten ist, dass das finite Verbum an zweiter Position stehen muss: *Die Gerade schneidet den Kreis nicht. *Die Gerade nicht schneidet den Kreis.* In manchen Sprachen wird das Verbum durch zwei verneinende Partikel umschlossen, wie im Französischen: *Le professeur vient à l’école*. *Le professeur ne vient pas à l’école.*

Wenn in einem Satz Quantoren enthalten sind, so kann die Einbringung eines verneinenden Ausdrucks verschiedenste Bedeutungen hervorbringen.
(II.0) *Alle Kreisdurchmesser enthalten den Mittelpunkt (des Kreises).*
(II.1) *Nicht alle Kreisdurchmesser enthalten den Mittelpunkt.*

(II.2) *Kein Kreisdurchmesser enthält den Mittelpunkt.*
(II.3) **Kreisdurchmesser enthalten keinen Mittelpunkt.*

Der Mathematiker wird lediglich (II.1) als Verneinung von (II.0) akzeptieren, aber das beruht auf der Vereinbarung, dass die Sätze (II.0) und (II.1) entgegengesetzten Wahrheitswert haben sollen und ihre Disjunktion jedenfalls wahr sein sollte. Auch (II.2) hat den entgegengesetzten Wahrheitswert von (II.0). Aber (II.0) und (II.2) beschreiben logisch gesehen zusammen nicht alle Möglichkeiten (es wäre denkbar, dass einige Durchmesser den Mittelpunkt enthalten und einige nicht).

Der Satz (II.3) ist aus einem anderen Grunde inakzeptabel: Da mit Mittelpunkt offenbar der eindeutig bestimmte Mittelpunkt des Kreises gemeint ist, könnte (II.3) nur einen Sinn ergeben, wenn es mehrere Mittelpunkte gäbe (vgl. mit den Sätzen *Die Folge der Quadratzahlen enthält keine Primzahl* oder *Quadratische Parabeln enthalten keinen Wendepunkt = Es gibt keinen Punkt der quadratischen Parabel, der die Eigenschaft hat, Wendepunkt zu sein*).

Man vergleiche des Weiteren mit:
(III.0) Alle kubischen Parabeln haben einen Wendepunkt.
(III.1) Nicht alle kubischen Parabeln haben einen Wendepunkt.
(III.2) Keine kubische Parabel hat einen Wendepunkt.
(III.3) Kubische Parabeln haben keinen Wendepunkt.

Man muss also sehen, dass die Anweisung „Verneine den Satz ...!“ zwar syntaktisch mehrere Möglichkeiten offen lässt, von denen in der Regel aber nur eine Möglichkeit den mathematisch erwünschten Effekt hat. Ähnliche Überlegungen kann man mit der Verneinung des Satzes *Alle Menschen sind sterblich* anstellen, nämlich etwa *Nicht alle Menschen sind sterblich. Alle Menschen sind nicht sterblich. Alle Menschen sind unsterblich, ...*

Eine interessante Beobachtung ist folgende Tatsache: Der Wahrheitsgehalt affirmativer Sätze scheint im Alltag leichter verifizierbar zu sein. In vielen Fällen genügt das Eintreffen eines Ereignisses, die Beobachtung eines kurzen Zeitintervalls um eine positive Aussage zu treffen. Man vergleiche etwa die folgenden Sätze, in denen im affirmativen Fall ein abgeschlossenes Ereignis vorliegt: *Hans ist gekommen. Julia hat die Hausaufgabe schon gemacht. Ich habe einen Beweis gefunden. Hans ist nicht gekommen* (dazu musste man vielleicht länger warten oder in mehreren Zimmern nachschauen). *Julia hat die Hausaufgabe noch nicht gemacht* (denn es fehlt noch ein Beispiel). *Ich habe keinen Beweis gefunden* (aber es ist vielleicht noch möglich). Dieser Unterschied mag die Ursache sein, dass in vielen Sprachen in verneinten Sätzen sogar andere Konstruktionen gebraucht werden als in bejahten. Dies ist im Englischen der Fall: *My brother went to the cinema. My brother did not go to the cinema.* Im Lateinischen ist dies bei der Befehlsform der Fall: *Noli me tangere! Ne id dixeris!*

1.4.3 Zur Semantik

a) Zum Bedeutungsgehalt mathematischer Texte

Der Bedeutungsgehalt der mathematischen Sprache macht Mathematik zu einem vielseitigen und wirksamen Kommunikationsmittel. Das Gespräch mit der Natur ist – um die Metapher von Galilei aufzugreifen – nur möglich, weil in der mathematischen Sprache Aussagen über die Natur formulierbar sind.

Eine mathematische Formel wie $z = xy$ ist vielseitig anwendbar und hat eine *Grundbedeutung*: Die Größe z hängt linear von den beiden Größen x und y ab. Diese Formel ist der *Prototyp einer bilinearen Abbildung*. In den Anwendungen werden meist andere Symbole substituiert. In der Elektrizitätslehre kann sie dann $U = iR$ heißen, in der Bewegungslehre $s = ct$ und in der Wärmelehre $T = pV$. Die Exponentialfunktion $t \mapsto e^{-\lambda t}$ enthält Information über Zerfallsprozesse und Abklingphänomene verschiedenster Art.

Für Skalen stellt die Mathematik verschiedene Prototypen bereit: die geordnete Folge der ganzen Zahlen Z – diskret und linear; Z mod *m* (das ist eine zyklische Gruppe der Ordnung *m*)–- diskret und zyklisch (z. B. $m = 12$ auf dem Ziffernblatt der Uhr); die Zahlengerade R – stetig und linear und den Einheitskreis S^1 – stetig und zyklisch. Die Zahlengerade R dient als Modell für die Zeit. Mathematiker und Physiker lassen die Zeit von $-\infty$ nach $+\infty$ fließen, aber in der Alltagssprache kommt sie uns entgegen: *die kommende Woche*, *das vergangene Jahr*, ...

Figuren werden in der Ebene als *Dreiecke*, *Vierecke*, *Kreise*, ... klassifiziert, im Raum als *Quader*, *Pyramiden*, *Kegel*, *Kugeln*, ... In letzter Zeit wurde der "Dialekt der Fraktale" in den mathematischen Werkzeugkoffer aufgenommen. Ob damit wirklich die Sprache gefunden wurde, in der die Natur zu uns am liebsten spricht, wie schon behauptet wurde, wird sich noch zeigen. Jahrhunderte mathematischer Forschung haben bedeutungsvolle mathematische Modelle geschaffen. Die Klassifikation der kristallographischen Gruppen ist nützlich für das Studium molekularer Anordnungen; Eindeutigkeitssätze für Differential- und Integralgleichungen erklären Zusammenhänge zwischen Ursache und Wirkung und ermöglichen so Vorhersagen und technische Anwendungen. Die Beispiele ließen sich vermehren und belegen die vielseitige Verwendbarkeit der mathematischen Sprache.

Der entscheidende Punkt ist dabei die Dualität zwischen kommunikativer und kognitiver Funktion der Sprache: Die Formeln $z = xy$ oder $t \mapsto e^{-\lambda t}$ gestatten sowohl eine komprimierte Mitteilung als auch einen weiteren Erkenntnisgewinn. Begriffe wie *Halbwertszeit*, *Zerfallskonstante*, ... können präziser erfasst werden bzw. in ein semantisches Netz eingebunden werden, in dem Begriffe aus der Analysis (*Ableitung*, *Änderungsrate*, *Logarithmus*, ...) bereitstehen. Eine wesentliche Leistung der Mathematik besteht ja gerade darin, dass Begriffe mit Hilfe mathematischer Verfahren definiert werden. Dies ist nicht so problematisch, wenn diese Begriffe im Alltag gar nicht vorkommen, wie etwa bei der Definition des mathematischen Begriffs Gruppe durch die bekannten Axiome der Gruppentheorie. Das Wort *Gruppe* kommt zwar im Alltag vor, bezeichnet aber einen deutlich verschiedenen Begriff.[5] Größer ist das Problem, wenn die Begriffe schon im Alltag oder in der Physik vorkommen, wie etwa GESCHWINDIGKEIT. Es ist dann schwierig einzusehen, dass dieser Begriff erst einer Präzisierung und letztlich einer Definition bedarf, um als mathematischer Begriff gelten zu können. Eine Möglichkeit ist etwa, Geschwindigkeit als Momentangeschwindigkeit durch den Differentialquotient festzulegen.

Natürlich ist auch die Mathematik darauf angewiesen, mit einigen undefinierten Grundbegriffen zu beginnen, also mit Begriffen, die nicht einfach auf andere Begriffe zurückgeführt werden können, sondern deren Bedeutung durch Erfahrung erschlossen werden muss, z. B. MENGE. Dabei stellt sich das systematische Problem durchaus anders als das didaktische. Der Begriff ABBILDUNG kann zwar in einem systematischen Aufbau auf Begriffe der Mengenlehre zurückgeführt werden (als eine 2-stellige Relation mit besonderen Eigenschaften); für den Unterricht dürfte sich dies aber keinesfalls empfehlen. (Dort wird man vielmehr versuchen, diesen Begriff allmählich zu erarbeiten bzw. mit dem vormathematischen Begriff ZUORDNUNG verbinden.) Das Problem der schrittweisen Präzisierung, für welches in der Mathematikdidaktik nach einem Vorschlag von R. FISCHER (1986) der Terminus Exaktifizierung üblich wurde, ist ein Schlüsselproblem. Es geht dabei um die Ausgewogenheit zwischen systemimmanenter Genauigkeit und entwicklungspsychologisch notwendiger Unschärfe. Auf die Wahl einer adäquaten Sprachform (Gestaltung von Texten, Stil der Lehrersprache etc.) kann zunächst nur hingewiesen werden.

---

[5] Wir unterscheiden meist zwischen Begriff und Begriffsname und verwenden zur Bezeichnung von Begriffen Großbuchstaben. Dies bewährt sich auch, wenn man mit verschiedenen Sprachen arbeitet: Der mathematische Begriff GRUPPE wird im Deutschen durch das Wort *Gruppe*, im Italienischen durch das Wort *gruppo* usw. bezeichnet.

b) Polysemie

Wenn man, wie beschrieben, in mathematischen Texten die Bedeutung der verwendeten Ausdrücke durch verbale Definition nach Umfang und Inhalt genau festlegt, lassen sich diese grundsätzlich frei wählen. Auf die Beachtung sinnvoller Traditionen wie auf lernpsychologische Gesichtspunkte wurde schon hingewiesen.

Der Freiheitsraum bei der Entscheidung, was eine Bezeichnung bedeuten bzw. wie eine Bedeutung bezeichnet werden soll, wird von den Mathematikern in verschiedener Weise genutzt:

- Man muss immer damit rechnen, dass in Texten *gleichen Ausdrücken und Symbolen unterschiedliche Bedeutungen* zugeordnet werden (Polysemie bzw. homonymer Wortgebrauch). Z. B. kann mit "Bewegungen" einmal die Gruppe aller Kongruenzabbildungen, ein andermal nur die der gleichsinnigen Kongruenzen gemeint sein. Auf dieses Problem wird im Folgenden etwas ausführlicher eingegangen werden.
- Umgekehrt können gleiche Begriffe in unterschiedlicher Weise bezeichnet werden (synonymer Wortgebrauch). Die Wörter *Rhombus* und *Raute* bezeichnen denselben Typ eines Vierecks. Auch *Abbildung*, *Operator* und *Funktion* werden heute zumeist zur Bezeichnung desselben Begriffes, aber in unterschiedlichen Kontexten verwendet. In der Geometrie wird meist *Abbildung* bevorzugt, in der Technik und in der Physik *Operator*, aber in der Analysis eher *Funktion*. Man denke des Weiteren an die Bedeutungsgleichheit von *zusammenzählen* und *addieren*, *wegzählen* ode*r wegnehmen* und *subtrahieren*, *Rauminhalt* und *Volumen* usw. Für die Didaktik ist folgende Frage von Bedeutung: Soll ein mathematisches Fachwort eher der Alltagssprache entnommen werden oder eher dem Lehnwortschatz entnommen werden? Für die erste Lösung spricht, dass die Wörter dem Schüler vertraut klingen. Dagegen spricht aber, dass damit auch falsche Vorstellungen mitgetragen werden. Das Lehnwort signalisiert möglicherweise eine erhöhte Aufmerksamkeit. Der häufige Fehler $2x - x = 2$ kann dadurch erklärt werden, dass der Schüler die Subtraktion als „Wegnehmen“ interpretiert, also nimmt er x weg!

Im Fall mathematischer Fachbegriffe ist es oft schwer möglich, wie zum Teil in anderen Wissensbereichen üblich, aus Wortbildung, Wortstämmen und Wortwurzeln von Wörtern deren Bedeutungen herleiten zu wollen: Ein *Kettenbruch* tritt als spezielle Darstellung von Zahlen auf, indem Brüche miteinander verkettet oder verschachtelt werden (das Wort *Stapelbruch* wäre vielleicht besser; im Englischen sagt man *continued fraction*). Eine *Kettenlinie* ist aber ein mathematisches Modell für die Gestalt einer durchhängenden Kette.

Obwohl die meisten Fachwörter relativ eindeutig festgelegt sind, gibt es auch in der Mathematik Beispiele für Polysemie, d. h. Wörter mit kontextabhängiger verschiedener Bedeutung. Im Alltag sagt man, das eine oder andere Wort habe mehrere Bedeutungen. Sehr oft ist der Kontext ausreichend, um eine klare Zuordnung zu treffen. Die *charakteristische Funktion* gibt es in verschiedenen Bedeutungen in der Mengenlehre und in der Wahrscheinlichkeitstheorie. In der Mengenlehre wird sie synonym mit der Indikatorfunktion gebraucht:

$$c_A(x) = 1, \text{ wenn } x \in A \quad \text{und} \quad c_A(x) = 0, \quad \text{wenn} \quad x \notin A\,.$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist sie die Fouriertransformierte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\chi_F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dF(x)\,.$$

Körper kommen in der Algebra und der Geometrie vor. Man vergleiche die beiden Sätze *Die Kugel ist ein konvexer Körper* und *Die rationalen Zahlen bilden einen Körper*. Diese Polysemie kann bei Übersetzungen in andere Sprachen offenkundig werden. Der algebraische Begriff *Körper* heißt im Englischen *field*, der geometrische Begriff muss mit *body* übersetzt werden.

Eine folgenschwere Polysemie liegt in der Verwendung der kleinen Wörter *plus* und *minus* (bzw. der Symbole + und –) vor. Das Wort *plus* bezeichnet in der Regel eine 2-stellige Relation, nämlich die Addition von Zahlen oder Vektoren usw. In dieser Bedeutung kann es auch durch *und* ersetzt werden: $2 + 3 = 5$ gesprochen *zwei plus* *drei ist fünf* oder *zwei und drei ist fünf* oder auch *zwei und drei sind fünf.* Allerdings bezeichnet *plus* auch die Eigenschaft, eine positive Zahl zu sein: $+3>0$ gesprochen *plus drei ist größer als Null.*

Schlimmer ist es um das Wort *minus* bestellt. Es bezeichnet ebenfalls eine zweistellige Relation, die Subtraktion. In dieser Bedeutung kann es durch *weniger* oder *vermindert um* ersetzt werden: $9-5=4$ gesprochen *neun minus fünf ist vier* oder *neun weniger fünf ist vier* oder auch *neun vermindert um fünf sind vier ...* Weiterhin steht *minus* auch für die Eigenschaft einer Zahl, negativ zu sein: $-3<0$ gesprochen *minus drei ist kleiner als Null.* Leider bezeichnet aber *minus* auch eine einstellige Relation, nämlich die Bildung der inversen Zahl (=Gegenzahl) bezüglich der Addition. Auf dem Taschenrechner ist dies die Wechseltaste. Es ist $-a$ jene Zahl mit der Eigenschaft $a+(-a)=0$. Dies hat zur Folge, dass $-a>0$ gelten kann, falls nämlich $a<0$ war.

Man hat in letzter Zeit zu Recht den Unterschied zwischen Funktion und Funktionswert hervorgehoben. Aus der Paraphrase des Satzes *Der Sinus ist eine periodische Funktion* in der Form *Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion* wird deutlich, dass hier *Sinus* als Name für eine Funktion gebraucht wird. Hingegen kann *Der Sinus von 90° ist 1* in der Form *Der Sinuswert von 90° ist 1* verdeutlicht werden. Dennoch ist, sprachlich gesehen, die Verdeutlichung nicht unbedingt nötig. Ist nämlich mit *Sinus* der Funktionswert gemeint, so hat das Wort *Sinus* eine Valenz, d. h. es muss ergänzt werden: *Sinus von x, Sinus x.* Allerdings haben die meisten Funktionen ohnedies den Bestandteil *Funktion* in ihrem Namen: *Exponentialfunktion*, *Logarithmusfunktion*, *quadratische Funktion*,.... In der höheren Algebra ist es wichtig, zwischen *Polynom* und *Polynomfunktion* zu unterscheiden. Leider ist das Wort *rationale Funktion* sehr stark belastet. Es kann nämlich dreierlei bedeuten: einen Quotienten zweier Polynome $\frac{P(x)}{Q(x)}$, eine durch diesen Quotienten definierbare Funktion $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ (die nach dem Vorbild *Polynom* und *Polynomfunktion* dann **rationale Funktionsfunktion* heißen müsste!) und eine Äquivalenzklasse von Brüchen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Element des Körpers der rationalen Funktionen. Aber auch damit können Mathematiker leben.

Schwieriger ist es mit der gleichen Benennung von Argument und Funktionswert, wie es in der Elementargeometrie vorkommt. Der *Radius eines Kreises* ist wie die ursprüngliche Bedeutung des Wortes *Strahl* nahe legt, eine (gerichtete) Strecke vom Mittelpunkt zu einem Randpunkt des Kreises; *Radius eines Kreises* kann aber auch die Länge dieser Strecke sein. Betrachtet man die Funktion *L*, die jeder Strecke ihre Länge zuordnet, so gilt mit dieser doppeldeutigen Terminologie: *Radius eines Kreises = L* (*Radius eines Kreises*). Ähnliches gilt für *Durchmesser eines Kreises*, *Höhe eines Dreiecks*, ... In all diesen Fällen werden sowohl Strecken wie auch die Längen dieser Strecken gleich bezeichnet.

Bei den meisten Maßfunktionen kann man zwischen Argument und Funktionswert recht gut unterscheiden: *Strecke* $\rightarrow$ *Länge, Winkel* $\rightarrow$ *Winkelmaß, Fläche* $\rightarrow$ *Flächeninhalt, Körper* $\rightarrow$ *Rauminhalt* oder *Volumen.* Allerdings ist bei Winkel und Fläche eine gewisse Unschärfe üblich. Man sagt oft *Jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck ist* 60° (im Gradmaß). *Der Basiswinkel in einem rechtwinkelig gleichschenkeligen Dreieck ist* $\frac{\pi}{4}$ (im Bogenmaß). *Die Winkelsumme im Dreieck beträgt* 180°. statt genauer *Das Winkelmaß jedes Winkels im gleichseitigen Dreieck ist* 60° [im Gradmaß]. *Das Winkelmaß eines Basiswinkels in einem rechtwinkelig gleichschenkeligen Dreieck ist* $\frac{\pi}{4}$ (im Bogenmaß). *Die Summe der Winkelmaße im Dreieck beträgt* 180°. Dass Winkel und Winkelmessung durchaus schwierige Begriffe sind – tatsächlich muss man schon in der Elementargeometrie mit verschiedenen Winkelbegriffen arbeiten – kann man bei KRAINER (1990) nachlesen. Ebenso sagt man oft etwas nachlässig *Die Fläche des Kreises ist* $r^2\pi$, aber *Ein Quader wird von* 6 *Flächen begrenzt.* Von der Bedeutung des Wortes *Fläche* als geometrisches Gebilde, leiten sich auch die Komposita *Seitenfläche*, *Drehfläche*, *Regelfläche*,.... ab. Auch das selten gebrauchte Wort *Vielflach* (für Polyeder) gehört hierher. Wie schwierig es ist, eine adäquate Begriffsbestimmung für Merkmale und Größen zu geben, hat A. OBERSCHELP (1995) dargelegt. Er unterscheidet zwischen quantitativen Größen (wie Länge, Durchmesser, Umfang, Zeit, Geschwindigkeit), metrischen Merkmalen (wie Höhenlage, Zeitpunkt, Energieniveau), ordinalen Merkmalen (wie Windstärke, Härte, Prüfungsnoten) und Nominalmerkmalen (wie Farbe, Geschlecht).

Viele Begriffe der Elementargeometrie haben eine sehr vage Bedeutung. Was ist ein DREIECK? Sind das drei Punkte? Da man sagt*: Drei Punkte bilden ein Dreieck.* kann ein DREIECK durch die Angabe von drei Punkten definiert werden. Der Satz *Der Umfang eines Dreiecks ist die Summe seiner Seitenlängen* bedeutet aber, dass sich einem DREIECK eine als Länge interpretierbare Maßzahl zuordnen lässt, und dieses somit ein lineares Gebilde ist; d. h. ein Dreieck besteht aus drei Strecken. Aber aus dem Satz *Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann durch die Heronsche Flächenformel berechnet werden* entnimmt man, dass einem DREIECK eine als Flächeninhalt interpretierbare Maßzahl zugeordnet werden kann. Die Formulierung *Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 180°* legt nahe, dass ein DREIECK ein Kandidat für Winkelmessung ist. Natürlich kann man dies alles präzisieren. Der Satz *Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann durch die Heronsche Flächenformel berechnet werden* kann präzisiert werden als *Der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche kann durch die Heronsche Flächenformel berechnet werden.*

Auch beim Wort *Kreis* ist die Ambivalenz fast unvermeidlich. *Kreis* kann *Kreislinie* bedeuten, aber auch *Kreisfläche* (oder *Kreisscheibe*). Eine konsequente Sprechweise *Dreieckslinie* (für das aus den Seiten gebildete Polygon) und *Dreiecksfläche* (für den von der Dreieckslinie umschlossenen Bereich der Ebene) hätte sicher Vorteile, aber vielleicht doch auch Nachteile. In der algebraischen Topologie hat man durch die Begriffe der d-Skelette eines Simplex eine Präzision geschaffen (ein 2-dimensionales Simplex ist ein Dreieck, sein 1-Skelett die drei Seiten, das 0-Skelett die drei Eckpunkte), die aber für die Schule nicht notwendig erscheint.

Es sei noch erwähnt, dass *Dreieck* im Satz *Ein Dreieck ist durch die Angabe der Länge dreier Seiten gegeben* etwas anderes bedeutet als im Satz *Drei Punkte bilden ein Dreieck.* Denn durch die Länge der drei Seiten ist kein bestimmtes Dreieck in der Ebene festgelegt, sondern das Dreieck ist nur bis auf Kongruenz festgelegt, d. h. Schiebungen, Drehungen und Spiegelungen sind noch gestattet [*Dreieck* bedeutet hier eine *Klasse von Dreiecken*.] Man überlegt sich leicht, dass die Dinge bei den Begriffen QUADRAT, RECHTECK,.... aber auch WÜRFEL, KUGEL, ... ähnlich liegen.

c) Die Verwendung von Metaphern

Die Bedeutung von Wörtern unterliegt einem steten Wandel. Nur an wenigen Beispielen kann dieses reichhaltige Thema angedeutet werden. Ursprünglich schrieb man tatsächlich mit Gänse*federn*, heute mit Füll*federn*. Das Wort Fenster*scheibe* erinnert noch daran, dass Fenster ursprünglich rund waren. Manche alte Bedeutungen sind nur noch in Spuren erkennbar, so etwa die alte Bedeutung *Ding* (= Gerichtsversammlung) in *ding*fest machen. *Gewehr* bedeutete einst jede Waffe, mit der man sich *wehrt*. Die *Stube* bezeichnete einen beheizbaren Raum, wie an engl. *stove* noch erkennbar ist, ein *Zimmer* einen Raum mit Holzwänden, die eben ein *Zimmer*mann gemacht hat (vgl. auch engl. *timber*).

Die meisten Wörter der Alltagssprache sind bis zu einem gewissen Umfang mehrdeutig und erst der Kontext entscheidet, welche Bedeutung gemeint ist. Eine Ursache für diese Mehrdeutigkeit liegt in der Bedeutungsübertragung. Man denke an den *Flügel* eines Vogels und an den *Flügel*, auf dem das Konzert stattfinden wird (Bedeutungsübertragung auf Grund äußerer Ähnlichkeit) und die *Flügel* eines Flugzeugs (äußere Ähnlichkeit und ähnliche Funktion) oder an das *Haus* als Gebäude und das Herrscher*haus* als die Bezeichnung für eine Dynastie (ursprünglich die Bewohner des Herrscherhauses); vgl. *Haus* Habsburg. *Kopf* bezeichnet einen Teil des Körpers, aber ein Trotz*kopf* ist jemand, der einen trotzigen Sinn hat und das Tonband hat einen Schreib-Lese*kopf*. Oft verschieben sich die Gefühlswerte wie bei Übertreibungen (*Das habe ich schon tausendmal gerechnet*), Abschwächungen (*Noch einen Satz!*) oder Euphemismen (*Er ist entschlafen*).

Eine besondere Form des Bedeutungswandels liegt in der Metonymie vor. Damit ist die Verwendung eines Wortes gemeint, welches in einem logischen oder erfahrungsmäßigen Zusammenhang mit dem gemeinten Begriff steht. Etwa *Lorbeer* statt *Ruhm, rote Zahlen* für *Schulden*, die *grüne Linie* kann eine Untergrundbahn bezeichnen, die auf dem Streckenplan mit grüner Farbe markiert ist. Von hier sieht man, dass die Verwendung von Symbolen in der Mathematik als Metonymie aufgefasst werden kann. PIMM (1990) spricht sogar davon, dass die mathematische Sprache die Existenz mathematischer Objekte begründet. Er vergleicht Mathematik mit rituellen und künstlerischen Aktivitäten, die gewissermaßen ihre Objekte durch den Schaffensprozess erzeugen („ ..... how mathematical language can be and is used to ‘sing’ mathematical objects into existence“).

Unter Metapher[6] versteht man die bildliche Übertragung eines Wortes auf einen Begriff außerhalb der üblichen Bedeutung. Die Verwendung metaphorischer Begriffe ist in vielen Bereichen so geläufig, dass es oft Mühe macht, die verwendeten Metaphern als solche zu erkennen. Ein *tiefliegender Beweis* mag an einen *tiefen Bergsee* erinnern oder an einen nur mühsam zu hebenden Schatz, der *tief in der Erde* verborgen ist. Eine *oberflächliche Kenntnis der Funktionentheorie* muss den Anschein erwecken, als sei die Funktionentheorie ein *Meer, dessen Tiefen* es erst zu ergründen gilt. Der *kommende Tag* kommt pünktlicher als der Briefträger..... *Höhere Mathematik* ... die Mathematik erscheint als *Landschaft* strukturiert, *deren Berge* nicht leicht zu ersteigen sind. Über Metaphern in der Mathematik kann man bei PIMM (1987) und STEINER (1988) einige interessante Beobachtungen finden. PIMM unterscheidet zwischen außermathematischen Metaphern (mathematische Begriffe werden durch Begriffe der Alltagssprache „erklärt“: *eine Funktion verschwindet in einem Punkt ...*) und strukturellen Metaphern (neue mathematische Begriffe werden durch schon bekannte mathematische Begriffe „erklärt“: *Steigung einer Kurve*). Natürlich können derartige Metaphern durch Definitionen gewissermaßen festgeschrieben werden. Die Anschaulichkeit geometrischer Objekte erklärt auch, warum bei geometrischen Objekten oft keine klare Abgrenzung zwischen einfacher Übertragung des Wortes aus der Alltagssprache und metaphorischer Verwendung möglich ist (Beispiel: Ein Prisma oder eine Pyramide hat eine GRUNDFLÄCHE eigentlich nur in bestimmter Lage, d. h. wenn der Körper darauf ruht).

Ähnlichkeiten können bei Benennungen leitend sein: Die *komplexen Zahlen* sind den (reellen) Zahlen noch "ähnlich"; die arithmetischen Eigenschaften (algebraisch ausgedrückt: die Eigenschaft, einen Körper zu bilden) bleiben erhalten, doch die Ordnung geht verloren.

Mit dem Gebrauch von Metaphern wird das Ziel verfolgt, einen Begriff oder Sachverhalt unter Zuhilfenahme jener Bedeutungsvorstellungen verstehbar zu machen, die in der wörtlichen Bedeutung mit ihnen verbunden sind. Dabei können sie aber zumeist nur ein partielles Verstehen gewährleisten; andere Aspekte der Begriffs bzw. Sachverhalts bleiben ungeklärt (es sei hier auf LAKOFF & JOHNSON 1980 verwiesen). Der Satz *Achilles kämpft wie ein Löwe* bezieht sich auf den der Spezies Löwe zugeschriebenen Mut; Achilles benutzt aber nicht Pranken und Zähne im Kampf.

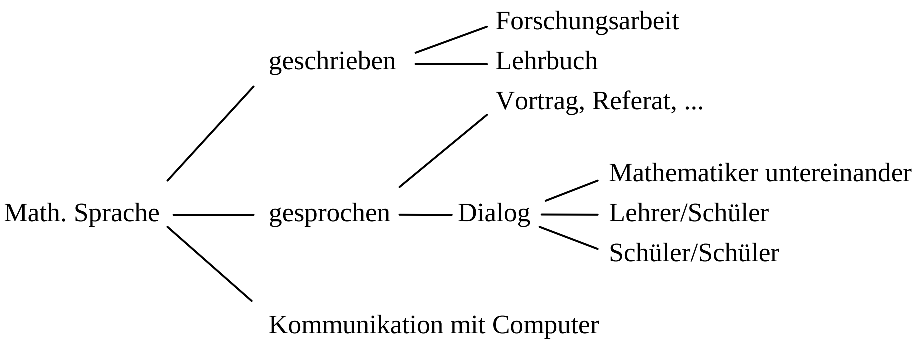
In diesem Zusammenhang ist die Wichtigkeit des Aufbaus geeigneter Prototypen für den Erwerb von Begriffen zu erwähnen. Auch mathematische Objekte werden an mehr oder weniger typischen Beispielen und damit zusammenhängender mathematischer Grundtätigkeiten erfahren. Der Begriff VOGEL wird vom Kinde (wenn auch oft schon mehr aus Bilderbüchern!) durch die Erfahrung von Beispielen erworben: Sperling, Amsel und Specht sind aber typischer als Eule oder Pinguin. Zur Markierung nicht prototypischer Objekte verwendet man sogenannte Heckenwörter, wie *eigentlich*, *genaugenommen*, *recht betrachtet*, *so zu sagen*, … Man vergleiche dazu die beiden Sätze *Das Krokodil ist genaugenommen keine Schlange* und *Die Blindschleiche ist genaugenommen keine Schlange.* Im ersten Satz stört das Wörtchen *genaugenommen*, im zweiten Satz liefert es eine wichtige Information.

[6] Die Abgrenzung zwischen Metonymie und Metapher kann im Einzelfall durchaus strittig sein.

Der Begriff GRUPPE lässt sich in der Geometrie gut vorbereiten, die EBENE ist eine Verstehenshilfe für die HYPEREBENE. Prototypen dürfen aber nicht hinderlich werden: Viele Kinder erkennen ein Quadrat nur in spezieller Lage. Auch die umgangssprachliche Verwendung kann störend wirken: Ein Quadrat ist (umgangssprachlich) kein Rechteck! Die Überwindung der durch Prototypen geprägten Vorstellungen kann ein interessantes Lehrziel darstellen: Der Begriff KURVE ist von zahllosen Beispielen so geprägt, dass die Existenz von Kurven, die etwa ein Quadrat ausfüllen, schon sehr unglaublich erscheint.

1.5 Mathematische Texte

Es ist nützlich, zu Beginn dieses Abschnitts eine Übersicht über die Verwendung der mathematischen Sprache nach Textsorten bzw. Kommunikationssituationen zu geben:



Die dabei auftretenden kognitiven Prozesse (zu denen natürlich emotionale Komponenten treten können!) sind auf der „Empfängerseite" Lesen, Hören, Interpretieren von Bildern, Verstehen,.... und auf der Seite des 'Senders' Schreiben, Sprechen, Zeichnen, Mitteilen, ...

Die mathematische Sprache unterscheidet sich in ihrer Gestalt, je nachdem, ob sie im Rahmen einer mündlichen Kommunikation (z. B. im akademischen oder schulischen Mathematikunterricht), eines Vortrags oder als schriftlicher Text produziert wird. Im Fall der verbalen Kommunikation unterstellt der Sprecher in aller Regel, dass die Zuhörer mit ihm das Wissen um eine ganze Reihe von Konventionen und stillschweigenden Vereinbarungen teilen, und dass sie jederzeit – zumindest grundsätzlich – die Möglichkeit der Rückfrage haben. Dies erlaubt es ihm, in vielen Fällen auf die Definition verwendeter Ausdrücke und Symbole zu verzichten. Außerdem vermag er eine Reihe von Informationen (notwendige Ergänzungen oder Einschränkungen) ohne explizite sprachliche Darstellung zu übermitteln. Schließlich hat er die Möglichkeit, seine verbale Darstellung durch Zeigen auf reale Modelle, auf Gezeichnetes oder Geschriebenes sowie mit den Mitteln der Körpersprache, von Mimik und Gestik, zu ergänzen bzw. zu präzisieren. Würde man, z. B. mit Hilfe einer Tonbandaufzeichnung, allein sein gesprochenes Wort als Text niederschreiben, so könnte dieser in mancher Hinsicht wenig eindeutig und unvollständig erscheinen.

Andererseits lässt die mündliche Darstellung einen großzügigeren Umgang mit der fachsprachlichen Prägnanz zu. Es kann schon vorkommen, dass sich das gesprochene Wort wie das normierte Ablesen von Geschriebenem anhört oder sich tatsächlich auf dieses reduziert (*Lesesprache*). Aber in vielen Fällen zeigt die gesprochene Sprache doch, zumal wenn auch nicht-sprachliche Darstellungsmittel beigezogen werden, mehr Redundanz und größere Ausführlichkeit. Die Fachsprache nähert sich dann stärker dem Charakter der Alltagssprache, auch wenn sie in der oben beschriebenen Art mit spezifischen Bezeichnungen und Sprechweisen durchsetzt bleibt. Auch emotionale Werte, wie *Das ist ein schöner Satz!* oder das vielgeschmähte Wort *Das ist aber trivial* (oder *Wie man leicht sieht!* - Der Kundige weiß, dass es in vielen Fällen da besonders schwierig sein kann), sind im Vortrag oder im Dialog häufiger vorzufinden.

Bei geschriebener Sprache sind deren Adressaten ebenfalls von Bedeutung. Sie sind im Fall einer Forschungsarbeit andere als im Fall eines Lehrbuchs, bei einem Tafelanschrieb im Rahmen einer akademischen Vorlesung andere als bei einem schulischen Tafel- oder Folientext, bei Schulbüchern andere als bei mathematischen Schul- oder bei Hausaufgaben. Sofern dem Verfasser bekannt ist, welche Vereinbarungen und welches Kontextwissen er bei ihnen als gegeben voraussetzen darf, mag er hinsichtlich Genauigkeit und Vollständigkeit relativ großzügig verfahren. Sofern er aber die Adressatengruppe nicht genau kennt oder bei ihr wenig entsprechende Voraussetzungen unterstellen darf, wird er sich durchgängig um eindeutige Definition der Ausdrücke und Symbole sowie um größtmögliche Vollständigkeit bemühen. Er nutzt in der Regel auch die Möglichkeiten zur Prägnanz, welche das verfügbare Repertoire an abkürzenden Schreibweisen eröffnet.

Die Bedeutung des Kontextes wird in einem Beispiel bei SIMEONOV 1996 herausgearbeitet. „Es besteht zweifelsohne ein Unterschied, ob man die Definition der Ableitung

1. in einem Buch liest
2. in einer Analysisvorlesung hört oder
3. in einer Topologievorlesung hört;
4. ob ein Professor diese Definition von einem Studenten bei einer Prüfung hört oder ob
5. ein Mathematiker des 17. Jahrhunderts zum ersten Mal ‘diese’ Definition zum Beispiel von Leibniz hört;
6. ob ein Gutachter diese Definition in einem Lehrbuch beurteilen muss oder ob
7. die Definition der Ableitung in einem Seminar über Grundlagen der Mathematik im Hinblick auf die Rechtfertigung des Grenzüberganges im Differentialquotienten besprochen wird“ (S. 425).

1.5.1 Vollständigkeit und Kontext bei mathematischen Texten

Zumeist wird bei geschriebenen mathematischen Texten angestrebt, dass sie aus sich heraus verstanden werden können, weil sie alle Informationen, die übermittelt werden sollen, auch explizit darstellen. Wir sprechen vom Merkmal der Vollständigkeit. Eine Definition ist vollständig, wenn sie alle und nur die erwünschten Objekte bzw. Beziehungen beschreibt. Dabei ist zwischen Vollständigkeit im logischen Sinn und Vollständigkeit in Bezug zu einem Kontext zu unterscheiden. So lauten die üblichen Axiome für eine GRUPPE $(G,*)$:

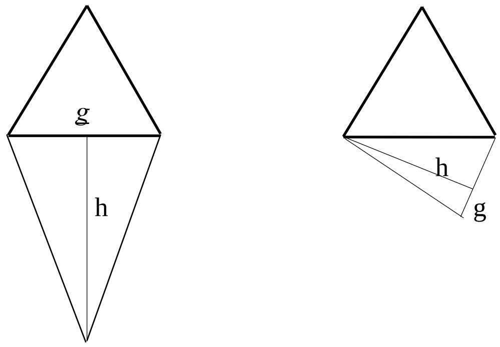
- (Assoziativgesetz) Für alle $x, y, z \in G$ gilt: $(x*y)*z = x*(y*z)$.
- (Existenz eines neutralen Elements) Es existiert $e \in G$, so dass für alle $x \in G$ gilt $e*x = x*e = x$.
- (Existenz der inversen Elemente) Zu jedem $x \in G$ existiert ein $x' \in G$, so dass gilt $x*x' = x'*x = e$.

Lässt man etwa das letzte Axiom weg, so wird der Begriff GRUPPE nicht vollständig beschrieben. Aus didaktischen Gründen sind viele Definitionen redundant, d. h. nicht alle Eigenschaften, die aufgezählt werden, sind logisch unabhängig. So genügt es, in obiger Liste nur die Existenz eines ‘linksneutralen’ Elementes und von ‘linksinversen’ Elementen vorauszusetzen (und zeigt dann, dass das ‘linksneutrale’ Element auch ‘rechtsneutral’ ist etc.).

Beispiel einer zunächst unvollständig erscheinenden Definition aus einem Schulbuch: "Punkte, die fest bleiben, heißen Fixpunkte." Steht aber zuvor: „Bei der Untersuchung geometrischer Abbildungen, sind gewisse Punkte von besonderer Bedeutung“, so wirkt das Ganze schon verständlicher.

Ein Lehrsatz ist vollständig, wenn er seiner Bedeutung gemäß genau auf die erwünschten Fälle anwendbar ist. Beispiel eines unvollständigen Lehrsatzes aus einem Schulbuch: "Eine Zahl wird mit zehn multipliziert, indem man eine Null anhängt." (Es fehlt die einschränkende Bezugnahme auf die dekadische Zahldarstellung natürlicher Zahlen.) Eine Instruktion ist vollständig, wenn sie alle zu ihrer erwünschten Befolgung notwendigen Informationen enthält. Gegenbeispiel, ebenfalls aus einem Schulbuch: "Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 12 cm. An jeder Seite soll ein gleichschenkeliges Dreieck angefügt werden, so dass eine sternförmige Fläche entsteht. Die Höhe eines angesetzten Dreiecks ist doppelt so lang wie seine Grundseite. Konstruiere die

Figur und trage die gegebenen Maße ein! Berechne die Gesamtfläche und den Umfang! (Runde jeweils das Teil- und Endergebnis auf 2 Dezimalstellen!)" Der Text lässt für den ersten Schritt mindestens zwei verschiedene Interpretationen zu, die in den folgenden Zeichnungen repräsentiert sind:



Die vermutlich nicht intendierte Interpretation könnte z. B. durch folgende sprachliche Vervollständigung ausgeschlossen werden: "Das angesetzte Dreieck hat eine Seite mit dem gleichseitigen Dreieck gemeinsam; die zugehörige Höhe ist doppelt so groß wie diese Seite".

Zwischen den Kennzeichen Eindeutigkeit und Vollständigkeit der mathematischen Fachsprache besteht ein Zusammenhang. Bei einem unvollständigen Text geht leicht die Eindeutigkeit verloren, besonders wenn er nur aus einem Satz besteht (z. B. bei einer Definition). Auch erwecken Mängel in der Eindeutigkeit oft den Eindruck der Unvollständigkeit. Andererseits kann auch ein Text, der nur eindeutige Begriffe und Sätze enthält, dennoch unvollständig sein.

In der Zusammenschau der genannten Merkmale der mathematischen Fachsprache muss noch deutlich herausgestellt werden, dass jeder Text in dem situativen Zusammenhang zu sehen ist, in dem er steht: ist er einem Lehr- oder Schulbuch entnommen, gehört er einer Fachvorlesung oder einem Fachvortrag an, ist er Ausschnitt aus einem Unterrichtsdialog usw. Sollte er so formuliert sein, dass man ihm z. B. Eindeutigkeit und Vollständigkeit nicht ohne weiteres zusprechen möchte, so gilt doch: Absprechen kann man ihm solche Prädikate erst, wenn der *Kontext* mit berücksichtigt wird. Es können hier Vorkenntnisse, stillschweigende Übereinkünfte oder Gewohnheiten bestehen, aufgrund derer Zweifel als geklärt und Informationslücken als gefüllt gelten können. Das Schaffen von Konventionen ist nicht nur möglich, sondern entspricht – wie oben dargelegt – sogar einem Merkmal der Fachsprache. Sie können für einen einzelnen Textautor, für eine Kommunikationsgemeinschaft, für ein Sprachgebiet oder international verbindlich sein: Sofern sie vom Rezipienten eines Texts zur Kenntnis genommen und akzeptiert werden, dienen sie als Grundlage für die Bildung eindeutiger Begriffe. Wird allerdings ein Text aus dem kommunikativen Rahmen, für den er geschaffen ist, herausgelöst, dann geht i. a. die Eindeutigkeit verloren. Um sie wieder herzustellen, müssen die getroffenen Vereinbarungen mitgeteilt werden.
Entsprechendes gilt für die Vollständigkeit. Absolute Vollständigkeit ist nicht immer zu realisieren, weil die betreffenden Sprachprodukte sonst zu aufwendig und zu komplex, und damit Kommunikationsprozesse unerträglich schwerfällig würden. Zugeständnisse sind möglich, sobald innerhalb eines kommunikativen Rahmens ein Kontext geschaffen wird, den alle Beteiligten kennen, und sofern die Kommunikationspartner Informationslücken aufgrund implizit bestehender Vereinbarungen zu schließen in der Lage sind. Wie weit diese Zugeständnisse gehen dürfen, ohne dass Übermittlungsstörungen oder gar Fehler riskiert werden, lässt sich nur aus der Situation heraus entscheiden.

1.5.2 Zur Prägnanz mathematischer Texte

Alle bisher genannten Kennzeichen der mathematischen Fachsprache lassen sich, zumindest in ihrer speziellen Ausprägung, aus den Merkmalen des fachlichen Denkens heraus begründen. Dies gilt nicht in gleicher Weise für die Prägnanz, obgleich auch sie oft als Mittel zur Erzielung inhaltlicher Klarheit eingesetzt wird. Jedenfalls ist man in der Mathematik in besonderer Weise bestrebt, Sachverhalte und Ideen mit einem möglichst geringen Aufwand an sprachlichen Mitteln darzustellen. Prägnante Sätze, die zugleich auch eindeutig und vollständig sind, werden als elegant bzw. sogar als Ausdruck fachlicher Qualifikation empfunden.

Im Einzelnen ist mit dem Bemühen um Prägnanz folgendes gemeint:

- Man belegt relativ einfache Symbole und Ausdrücke mit einem möglichst großen Bedeutungsumfang, so dass mit geringen sprachlichen Mitteln relativ viel Information übermittelt werden kann.
- Man formuliert Sätze so knapp, wie es eine sachgerechte Beschreibung des jeweiligen Sachverhalts ohne Informationsverlust eben noch zulässt. Man vermeidet jede Art von Redundanz.
- Die Wahl der Notationen und zugehörigen Sprechweisen erfolgt nach dem Prinzip der Zweckmäßigkeit und des minimalen Aufwandes.

Die Prägnanz steht in einem gewissen Spannungsverhältnis zur Vollständigkeit. Der Merksatz eines Schulbuchs "Grundmenge ohne Teilmenge ist gleich Restmenge" verwendet zwar sehr wenige Sprachmittel, ist aber wohl kaum ausreichend, um den intendierten Zusammenhang vollständig zu erklären. Zumindest müsste es heißen: "Die Elemente der Grundmenge G ohne die Elemente einer Teilmenge A bilden die Restmenge A' (von A in G)!" Das Bemühen um Prägnanz darf also nicht auf Kosten einer notwendigen Vollständigkeit gehen.

1.5.3 Umgang mit mathematischen Texten

Nun ist allerdings auch ein geschriebener Text, der die Normen der Eindeutigkeit und der Vollständigkeit in optimaler Weise beachtet, auf völlig andere Weise zu lesen als ein Text der Alltagssprache (etwa ein Zeitungsbericht) oder ein Prosatext der Literatur. Mit der Frage des Lesens mathematischer Texte beschäftigen sich MACGREGOR (1990a) und MUNRO (1990). Sie weisen auf unterschiedliche Merkmale von alltäglichen und fachlichen Texten sowie auf Lesegewohnheiten des Alltags hin, die das Verstehen mathematischer Texte erschweren.

Eine dieser Gewohnheiten besteht darin, dass wir Texte nicht Wort für Wort lesen, sondern bei jedem Satz oder Textabschnitt schon kurz nach Lesebeginn Hypothesen über den nachfolgenden Teil bilden, diese dann nur noch "stichprobenweise" überprüfen und lediglich in zwingenden Fällen revidieren. Dies ist bei alltäglichen Texten zumeist aus zwei Gründen "unschädlich": Zum einen werden hier oft viele Wörter verwendet, um relativ wenig Information zu kodieren, so dass es nicht auf die Wahrnehmung jedes einzelnen Wortes ankommt (Redundanz). Zum zweiten können die Leser in die Lektüre in der Regel aus allgemein verfügbarer Alltagserfahrung ein Sachwissen einbringen, das ihnen beim rascheren Erfassen des Textsinns hilft. Beides ist bei mathematischen Texten in aller Regel nicht der Fall. Da allgemein verfügbares Alltagswissen fehlt, kann hier der Leser nicht schon nach wenigen Worten den Inhalt folgender Textteile antizipieren, außer er bringt zum Textinhalt größere fachliche Vorkenntnisse mit. In den Fällen, wo die fachliche Bedeutung von Ausdrücken von der alltäglichen abweicht, könnte das Beiziehen solchen Erfahrungswissens auch sinnentstellend sein. Der Leser muss bei mathematischen Texten also den anstrengenden Versuch unternehmen, die Bedeutung von Fachausdrücken bzw. die geänderte Bedeutung der als Fachausdrücke verwendeten Ausdrücke der Alltagssprache zutreffend zu erfassen. In jedem Fall zwingt ihn die höhere Prägnanz bzw. Informationsdichte mathematischer Texte dazu, Wort für Wort zu lesen, um den Sinn komplett aufzunehmen. Dadurch werden auch an das Kurzzeitgedächtnis weit höhere Anforderungen gestellt. Hier sollte auch im Unterricht auf geeignete Hilfen verwiesen werden, wie das Erstellen von Notizen, das Aufschreiben der Schlüsselwörter, das selbständige Nachvollziehen von Rechnungen, das Nachschlagen unbekannter Termini usw.

Des Weiteren wird beim Lesen alltäglicher Texte die Sinnerfassung bzw. das Verstehen durch ein intuitives syntaktisches Wissen beschleunigt. Wir brauchen hier nicht "genau" zu lesen in der Weise, dass wir jeden einzelnen Buchstaben und jedes Wort beachten müssten. Selbst wenn wir mehrere Buchstaben und Wörter "übersehen", erhalten wir immer noch hinreichend viel Information, um den Sinn des Textes erfassen zu können. Dies kann folgendes Experiment zeigen. Bildet man aus einem fachsprachlichen Text durch Weglassen fachspezifischer Sprachanteile einen Lückentext, so ist es dem Leser kaum möglich, die fehlenden Teile zu ergänzen. Beispiel: "Es seien ________ die Seiten eines __________. Der der Seite ___ gegenüberliegende Winkel ist __________ ein _____ Winkel, wenn die Beziehung ___________ gilt." Beschränken sich die Lücken hingegen auf alltagssprachliche Anteile, so fällt die Ergänzung wesentlich leichter: "_________ a, b, c die Seiten _______ Dreiecks. Der der Seite c _______________ Winkel ___ genau dann ein rechter Winkel, wenn ______________ $a^2 + b^2 = c^2$ gilt."

Sicherlich gibt es bei dem einen oder anderen Leser auch ein ausreichendes Wissen über die "grammatischen Regeln", nach denen mathematische Texte konstruiert sind. Diese unterscheiden sich allerdings von denen der Alltagssprache durch eine strengere Logik und höhere Komplexität, und sie sind daher nicht allgemein verfügbar.

Genaues Lesen ist bei mathematischen Texten aber auch noch aus einem anderen Grund nötig. Wenn in der Alltagssprache ein Verfasser oftmals nicht genau sagt, was er meint, und auch nicht genau das meint, was er schriftlich ausdrückt, ist der Leser daran gewöhnt und auch zumeist auch in der Lage, eine solche Differenz von "objektivem Bedeutungsgehalt" des Texts und subjektiv intendierter Bedeutung aufgrund von Kontextwissen "zu korrigieren". In der mathematischen Fachsprache jedoch, wo eine solche Differenz nach Möglichkeit vermieden wird (Eindeutigkeit und Vollständigkeit), ist der Leser dazu gezwungen, das Geschriebene "wörtlich" zu nehmen; er muss sich jedenfalls des beschränkten Interpretationsspielraums bewusst sein, der ihm bei solchen Texten zur Verfügung steht.

Insgesamt scheint es bei mathematischen Texten in aller Regel unverzichtbar, die - eventuell durch Prägnanz verstärkte - Informationsdichte einzelner Textteile, oft einzelner Sätze, mit Hilfe von Beispielen, Modelldarstellungen und Anwendungen aufzulösen. Es bedarf eines permanent reflektierenden, oftmals auf frühere Textstellen zurückgreifenden, intensiven Lesens, durchsetzt von Pausen der Vergegenwärtigung, der Exemplifizierung und der Anwendung. Wiederholtes Lesen gleicher Textstellen ist oftmals für ein volles Verstehen unverzichtbar.

Alles was bisher generell über das Lesen mathematischer Texte gesagt wurde, gilt in verstärktem Maße speziell für das Lesen mathematischer Symbolsysteme mit ihrer ausgeprägten Prägnanz und ihrer Eigenschaft, dass schon kleinen Unterschieden im Erscheinungsbild große Bedeutungsunterschiede entsprechen – man denke an f für Funktion und f' für die Ableitung dieser Funktion oder an den Unterschied von $2a$ und a^2. Deshalb gilt es in besonderer Weise, jedes einzelne Zeichen in seiner Gestalt und in seiner Verschiedenheit von anderen präzise zu erfassen. Aufgegeben muss hier auch die alltägliche Lesegewohnheit, Texte zeilenweise streng linear von links nach rechts abzuarbeiten. Nicht wenige fachliche Symbole erstrecken sich flächenhaft über mehrere Zeilen und sind in einer speziellen, nicht immer rechts-links-normierten Ordnung zu lesen. Hier kann auch der Einsatz von Programmen der Computer-Algebra hilfreich sein, denn die dort meist normierte Eingabe (die oft von der gewohnten Schreibweise abweicht) erzwingt ein genaues Lesen bzw. ein Überdenken der Symbolik, sonst wird die Eingabe mit dem Vermerk *syntax error* zurückgewiesen.

Zusammenfassend sei festgehalten: Mathematische Texte sind vor allem durch zwei Merkmale ausgezeichnet, nämlich durch hohe Informationsdichte und geringe Redundanz, d. h. auf wenigen Zeilen wird sehr viel Information eingepackt und nur wenige Zeichen sind entbehrlich. Dies erfordert, wie erwähnt, den Erwerb anderer Lesestrategien. Prosatexte können dagegen meist "unvollständig" gelesen werden, ohne dass das Verständnis erschwert ist. Das Verstehen mathematischer Texte erfordert den Einsatz aktiver Lesehilfen, wie Mitrechnen, Anfertigen von Skizzen, selbständiges Nacherfinden etc. Inwieweit eine gezielte Unterweisung solcher Techniken möglich und sinnvoll ist, wird Gegenstand weiterer Forschungen sein.

2. Sprache und Mathematiklernen

Ging es im vorausgehenden Kapitel um Sprache allgemein und um mathematische Fachsprache im Besonderen als selbständiges Thema, so soll nunmehr im zweiten Kapitel Sprache als Medium des Lehrens und Lernens von Mathematik betrachtet werden. Am Beginn stehen Bemerkungen zum Zusammenhang zwischen Sprache, Lernen und Mathematik und ein Überblick über Lerninhalte und Lernziele des mathematischen Unterrichts (2.1). Sodann sollen Rolle, Funktion und Bedeutung der Sprache beim Aufbau mathematischen Wissens (2.2) sowie bei der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten der Schüler (2.3) erörtert, d. h. eine Bestimmung des didaktischen Orts der Sprache im Mathematiklernen versucht werden.

2.1 Sprache - Lernen - Mathematik

Der Frage nach der Beziehung bzw. dem Zusammenhang zwischen Sprache, Lernen und Mathematik kann man sich auf verschiedene Weise nähern. Eine der möglichen Betrachtungsweisen untersucht die Frage, in welcher Weise sprachliche Aktivitäten (alltagssprachliche wie fachsprachliche) das Lernen von Mathematik fördern können (sie wird in den Abschnitten 2.2 und 2.3 behandelt). Im vorliegenden Abschnitt werden das Lernen von Sprache und das Lernen von Mathematik einander vergleichend gegenübergestellt und nach möglichen Verbindungen zwischen beiden Lernaufgaben gesucht (2.1.1). Dann wird über das Problem des Mathematiklernens in verschiedenen Sprachen informiert (2.1.2), ehe, in Vorbereitung der folgenden Abschnitte, ein allgemeiner Überblick über Inhalte und Ziele des Unterrichts gegeben wird (2.2.3). Zur Thematik siehe auch MAIER (1986).

2.1.1 Lernen von Sprache – Lernen von Mathematik

Die Möglichkeit, eine Sprache zu erlernen, gehört zu den grundlegenden Fähigkeiten des Menschen (dazu siehe SCHWARZ 1992 und ZIMMER 1995). Es ist erstaunlich, wie scheinbar mühelos dies Kindern schon in frühem Alter gelingt und wie sie dabei sukzessive auch eine Grammatik der erlernten Sprache aufbauen. Mag Menschen deutscher Muttersprache Ungarisch oder Chinesisch schwierig erscheinen, Kinder in Ungarn oder China lernen diese Sprachen mühelos. Es ist noch immer umstritten, inwieweit die Sprachlernfähigkeit – möglicherweise aufgrund besonderer neuro-physiologischen Gegebenheiten – auf das Kindesalter beschränkt bleibt. Die sog. ‘critical age hypothesis’ war bereits Gegenstand zahlreicher Untersuchungen (siehe SINGLETON 1989). Die Erfahrung zeigt jedenfalls, dass ab einem gewissen Alter das Erlernen einer Zweitsprache wesentlich schwerer fällt als das Erlernen der Muttersprache in der Kindheit. Es ist eine gezielte Unterweisung nötig, und selten wird dabei ein vergleichbar hoher Grad an Perfektion erreicht. Nur Kinder sind offenbar in der Lage, auch noch eine zweite Sprache auf ‘natürliche’ Art zu erlernen. Freilich muss ein ernsthafter Vergleich berücksichtigen, dass ein Schüler mit einem achtjährigen Englischunterricht von ca. 120 Stunden pro Schuljahr lediglich auf 8 x 120 = 960 Stunden kommt, in denen er – vielleicht sogar nur teilweise – der englischen Sprache ‘ausgesetzt’ ist. Ein Kleinkind jedoch, das täglich nur vier bis fünf Stunden sprachlichen Kontakt mit seinen Eltern hat, erreicht schon in einem Jahr eine Exposition von weit über 1000 Stunden.

Im späteren Alter erweitert sich die Kenntnis der ‘natürlich’ erlernten Muttersprache – und damit die Kommunikationsfähigkeit – auf vielerlei Weise, auch wenn keine Fremdsprache erlernt wird. Man denke an das Erlernen der Schrift (Schreiben und Lesen), an das Kennenlernen von Literatur, Musik und Kunst. Letztlich bedeutet der Erwerb jeglichen Wissens eine Erweiterung der Sprachfähigkeit, nicht zuletzt auch das Erlernen von Mathematik.

Kann man sich auch Mathematik auf ‘natürliche’ Weise aneignen? Das Erlernen einer Sprache lässt sich als das Setzen von Parametern in einem angeborenen Sprachmodul beschreiben (ROEPER 1988). Dieser Sprachmodul ist als angeborene Fähigkeit zu verstehen, die nicht auf andere Faktoren intelligenten Verhaltens reduzierbar ist, und der sich möglicherweise in verschiedene Teilfähigkeiten aufspalten lässt.[7] Das Erlernen einer weiteren Sprache erfordert dann, neben dem Erlernen des neuen Wortschatzes, vor allem die Neueinstellung dieser Parameter (FLYNN 1988). Könnte es nicht auch für das Mathematiklernen vielleicht einen eigenen Modul geben? Wenn ja, dann müssten wohl, ähnlich wie beim Erlernen der Muttersprache, auch im Bereich der Mathematik flexible Transfers und damit ein exemplarisches Lernen möglich und sinnvoll sein. In der Tat eignen sich Kinder grundlegende Fähigkeiten, wie Zählen, Klassifizieren, Ordnen, Erkennen und Herstellen von räumlichen Mustern (Raumvorstellung) offenbar auch ohne gezielte Instruktion an. Die Literatur über den Erwerb der Zahlwortreihe bzw. des Zahlbegriffes ist uferlos, so dass hier nur stellvertretend FUSON & RICHARDS & BRIARS (1982) und TOWSE & SAXTON (1997) genannt seien. Doch schon der Erwerb der Kulturtechnik Rechnen macht offenbar - wie Lesen und Schreiben - eine planvolle Instruktion nötig. Falls es dann auch für das Mathematiklernen eine kritische Altersschwelle gibt, so sollte mit ihm in möglichst jungen Jahren intensiv begonnen werden, damit später überhaupt ein Weiterlernen möglich bleibt. Verpaßte Chancen wären möglicherweise schwer wieder gut zu machen. Die Frage des Anteils an angeborenem Wissen wird in der Kognitionspsychologie untersucht. SPELKE (1995) stellt dazu sechs Thesen auf, von denen zwei für das Lernen von Mathematik besonders wichtig erscheinen: „Initial knowledge is domain-specific“ (dazu schreibt die Autorin auf S. 435 „ ... young infants appear to have systematic knowledge in four domains: physics, psychology, number, and geometry.“) und „Initial knowledge is task-specific“ (dazu: „Science often depends on linkages across distinct domains of knowledge, creating such disciplines as analytical geometry, mathematical physics, and mechanistic psychology ... The ability to make these linkages, in turn, may depend on the increasing interactiveness of domain-specific and task-specific systems of knowledge“ (S.444). Auch in BRAINERD (1982) findet man Hinweise auf Untersuchungen zum Aufbau mathematischer Begriffe beim Kind (z. B. HOEMANN & ROSS 1982 über Wahrscheinlichkeit und Zufall, SIEGEL 1982 zur Entwicklung der Größenbegriffe).

BIGELOW (1990) und MUNRO (1990) untersuchen, inwieweit sprachliche Prozesse, die beim alltäglichen Begriffserwerb eine Rolle spielen, mit den sprachlichen Prozessen korrelieren, die beim Lernen von Mathematik auftreten. BIGELOW knüpft an die These von *Chomsky* an, dass menschliche Sprachen unglaublich komplizierte grammatikalische Strukturen aufweisen, und dass uns – wie schon erwähnt – eine Fähigkeit angeboren sein muss, diese Strukturen zu erfassen, ein „language acquisition device“ (LAD). Wenn Kinder eine Sprache lernen, meistern sie etwas weitaus Komplexeres als es (auch höhere) Schulmathematik darstellt; dennoch gelingt dies in jungen Jahren und äußerst rasch. „They could not possibly achieve this feat just by observation, remembering, and extrapolating observed regularities in the speech around them. They could not possibly achieve what they do by applying multi-purpose learning strategies, of the sorts which we use in learning history, geography, accounting, mathematics, or any other such subject“ (BIGELOW 1990, S. 2).

Der für das Lernen von Sprache geeignete kognitive Modul (der LAD), über den Kinder verfügen, scheint etwas Einzigartiges zu sein. Bei der Frage, ob es einen Modul für das Lernen von Mathematik gibt, ist zu beachten, dass der LAD auf die Syntax natürlicher Sprachen ausgerichtet ist, und dass der mathematische Symbolismus teilweise eine ganz andere Syntax aufweist. Dies und vieles andere weist darauf hin, „that massive problems are located at the interface between mathematics education and natural languages“ (BIGELOW 1990, S. 2).

Obwohl auch MUNRO ein breites Spektrum von Situationen entwickelt, in denen die Strategien für das Lernen von Mathematik und für die Sprachverarbeitung verschieden sind, kommt er doch zu einer positiven Beurteilung der gestellten Frage. Er diskutiert, unter Verweis auf Literatur, drei Hypothesen zum Erwerb der Wortbedeutung:

---

[7] Ein gewichtiger Befund in diese Richtung wurde durch FISHER et al. (1998) erbracht, wo erstmals der Genort *SPCH1* auf Chromosom 7 identifiziert wurde, der mit der Entwicklung des Sprachvermögens zusammenhängen könnte.

- Die „semantic features hypothesis“ behauptet, dass die Bedeutung eines Wortes in semantische Einheiten zerlegbar sei, die auf der Wahrnehmung beruhen und nach bestimmten Regeln erworben werden.
- Die „functional core hypothesis“ geht davon aus, dass die Bedeutung eines Wortes mit einer Menge funktionaler Eigentümlichkeiten verbunden ist, die beim Begriffsaufbau erworben werden (d. h. wichtig ist die Verwendung des Wortes).
- In der Theorie der „Referential Models of Word Meaning“ wird behauptet, dass die Bedeutung eines Wortes mit dem Vorkommen in gewissen Kontexten verbunden ist, wobei Prototypen eine entscheidende Rolle spielen.

  MUNRO meint, dass beim Lernen von Mathematik vermutlich all diese Prozesse beteiligt, Prototypen aber besonders wichtig seien. Auf Grund seiner Untersuchungen schließt er: „The findings indicate that children use specific prototypes and examples in constructing the meaning of mathematical terms“ (MUNRO 1990, S. 9).

  Da sich die Frage der Existenz eines ‘mathematischen Moduls’ derzeit noch nicht entscheiden lässt, könnte man wenigsten prüfen, ob man nicht aus der Art, wie Kinder ihre (erste) Sprache erlernen, gewisse Schlussfolgerungen für ein ‘natürliches’ Lernen von Mathematik ziehen kann. In der Tat leitet ROBINSON (1990) aus der Sprachlernsituation eine Liste von Maßnahmen und Bedingungen ab, die auch für das Lernen von Mathematik förderlich erscheinen und hier nur skizzenhaft wiedergegeben werden können:
- Einbettung („immersion“): Kinder sollen wahrnehmen, dass der Alltag nicht nur mit Sprache erfüllt ist, sondern auch voller Mathematik steckt.
- Hinweisen („demonstration“): Es soll immer wieder gezeigt werden, dass Mathematik, wie Sprache, in vielerlei und sinnvoller Weise verwendet wird.
- Erwartungen („expectations“): Es muss gelingen, Kinder zu überzeugen, dass sie mit dem Lernen von Mathematik, wie mit Erlernen der Sprache, Erfolg haben können. Die oft von Generation zu Generation tradierte Erzählung vom Mißerfolg in Mathematik sollte abgebrochen werden.
- Verantwortung („responsibility“): Kinder sollen eigene Wege zum Lernen von Mathematik finden, wie ihnen dies auch bei der Sprache gelingt.
- Annäherungen („approximations“): Kinder sollen auch beim Mathematiklernen das Gefühl haben, dass ihre Antworten akzeptiert werden, auch wenn sie korrigiert werden müssen, d. h. es sollte das Selbstvertrauen gestärkt und der Mut zum Risiko gefördert werden.
- Beschäftigung („employment“): Es sollte viel Gelegenheit geboten werden, dass Kinder ihre mathematischen Fertigkeiten einsetzen, vor allem auch für ihnen selbst sinnvoll erscheinende Aufgaben.
- Rückmeldung („feed back“): Brauchbare Antworten der Kinder sollten bestätigt werden, eventuell verbunden mit einer indirekten Korrektur. (Beim kindlichen Spracherwerb gibt es die verstärkende Rückmeldung mit eventuell nötiger Korrektur.)

Auch BICKMORE-BRAND (1990) gibt einen Überblick über einige, ebenfalls aus der Sprachdidaktik stammende Aspekte, die für das Lernen von Mathematik bedeutsam sein könnten. Insbesondere nennt sie:
- Kontext („context“): Für die Vermittlung von Kenntnissen, Fertigkeiten und Wertvorstellungen ist ein bedeutsamer Kontext zu schaffen.
- Interesse („interest“): Ausgangspunkt des Lernens sind das Wissen, die Fertigkeiten und die Werte des Lernenden.
- Modellieren („modelling“): Der Lernende soll sehen, wie andere („significant persons“) mit diesen Fähigkeiten umgeht.
- Lernen in Stufen („scaffolding“): Es gilt, die Kinder herauszufordern, ihre Fähigkeiten auf der Basis des Vorhandenen schrittweise zu erweitern.
- Metakognition („metacognition“): Die Lernprozesse sollen im Klassenzimmer thematisiert werden.

- Verantwortung („responsibility“): In Kindern ist die Fähigkeit zu fördern, für ihr Lernen selbst verantwortlich zu sein.
- Gemeinschaft („community“): Es gilt eine Atmosphäre zu schaffen, in der Kinder bereit sind, sich einzubringen und gemeinsam handeln können.

2.1.2 Mathematik in verschiedenen Sprachen

In unserem Kulturkreis erscheint es zunächst selbstverständlich, dass Kinder in Mathematik in ihrer Muttersprache unterrichtet werden. Das ist schon nicht mehr so selbstverständlich, wenn man an die Kinder der zahllosen Gastarbeiter und Emigranten denkt, die derzeit in deutschsprachigen Ländern in die Schule kommen. Weltweit stellt sich das Problem noch in einer anderen Perspektive, da es mehrere tausend Sprachen gibt, obwohl deren Vielfalt in den letzten Jahrzehnten dramatisch zurückgegangen ist. Vor einigen Jahren wurde von der UNESCO das Problem der bedrohten Sprachen zum Jahresthema erklärt (zur Problematik siehe ROBINS & UHLENBECK 1991), was in Mitteleuropa leider keine öffentliche Resonanz gefunden hat. Viele Sprachen werden nach wie vor nur als gesprochene Sprachen verwendet; und selbst, wenn Sprachen zu Schriftsprachen geworden sind, ist es noch ein weiter Weg bis zur Verwendung als Schulsprache und ein noch weiterer Weg bis zur Verwendung als Sprache des Mathematikunterrichts.

Einen Markstein auf diesem Weg setzte das Symposium, welches 1974 mit Unterstützung von UNESCO, CEDO und ICMI in Nairobi stattgefunden hat (*NAIROBIREPORT* 1974). Dort wurde festgehalten, dass Mathematik (ähnlich wie Sprache) in einem gewissen Sinn universal ist: "Mathematics itself is universal ... mathematicians, whether they are from Botswana, or Britain, or Burma, show a common frame of reference, expressed in a strongly formalised notation which is universally accepted. The languages in which they discuss mathematics may differ, but about the mathematics itself there is nearly total agreement." Außerdem wurde festgestellt, dass auch die Probleme des Mathematikunterrichts weltweit ähnlich sind, wenngleich die sozialen und ökonomischen Bedingungen oft verschiedene Lösungen erfordern: “Mathematics education, then, is universal, in its problem area .... It is the solutions that differ.“ (CHRISTIANSEN & WILSON 1974, NAIROBIREPORT 1974, S.14–15).

Im Berichtband gibt MORRIS (1974) einen Überblick über die Situation in verschiedenen Ländern. Kurz dargestellt wird die Situation in Äthiopien (einem Land mit ca. 70 verschiedenen Sprachen!), Lesotho, Liberia, Nigeria (wiederum ein Land mit mehreren Hundert Sprachen), Singapore, Sri Lanka, Tanzania, United Kingdom und Zambia[8]. Zwei Beispiele, wie der mathematische Wortschatz durch Language Engineering aufgebaut werden kann, seien aus Kiswahili gegeben: Zunächst gab es dort kein allgemein gebräuchliches Wort für DIAGONALE. Man fand heraus, dass die Tischler bei der Herstellung von Betten Befestigungen verwenden, die, diagonal gespannt, *ulalo* genannt werden. So wurde *ulalo* das Wort für DIAGONALE im Geometrieunterricht. Ein anderes Problem war die Bezeichnung für positive und negative ganze Zahlen. Eine Nachforschung in verschiedenen Bantusprachen ergab, dass die Suffixe *-hasi* ‘hinunter’ und *-anya* ‘hinauf’ weit verbreitet sind. Daher heißt nun *tatuanya* ‘plus drei’ und *tatuhasi* ‘minus drei’ (man beachte, dass gegenüber dem Deutschen und auch der üblichen Kurzschreibweise +3 bzw. –3 die Reihenfolge verschieden ist).

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Symposiums können wie folgt zusammengefasst werden (siehe NAIROBIREPORT 1974, S. 103):

(1) Es gibt Länder, in denen der Unterricht praktisch durchgehend in einer Sprache erfolgt, die als Nationalsprache die Muttersprache des größten Teiles der Bevölkerung ist. Für einige dieser Sprachen ist gegenwärtig der Aufbau eines mathematischen Wortschatzes im Gange, wobei Entlehnung und das Schaffen neuer Wörter die wichtigste Rolle spielen. Es wird festgehalten, dass dieser Prozess grundsätzlich für alle

[8] Die Situation in Südafrika ist unter anderem Gegenstand von PRINS 1995 und 1997.

Sprachen möglich ist: „In this connection it is noted that there would appear to be a consensus among linguistic experts that any language can be developed to the point where its mathematical register is fully competent to fulfil all pedagogical needs“ (S.105). [9]

(2) In vielen Ländern erfolgt der schulische Mathematikunterricht in einer Sprache, die nicht die Muttersprache der meisten Kinder ist. Hier empfiehlt das Symposium eindringlich, den Erwerb der Unterrichtssprache, der meist erst mit Beginn der Schulzeit einsetzt, durch gezielte Maßnahmen zu fördern und bei der Einführung des Wortschatzes, der Bedeutungen und der Satzstrukturen in allen Gegenständen nach sprachdidaktischen Grundsätzen vorzugehen. [10]

(3) In anderen Ländern wird eine „lokale Sprache“, die zumindest die Muttersprache vieler dort ansässiger Kinder ist, in den ersten Jahren als Unterrichtssprache verwendet, und erst später der Unterricht in einer anderen Sprache, wie Englisch, Französisch oder Portugiesisch, durchgeführt. Auf die Verwendung dieser Sprache muss natürlich in geeigneter Weise vorbereitet werden. Ein Problem ist wie bei Nationalsprachen, die erst seit einigen Jahrzehnten Unterrichtssprachen geworden sind, der Aufbau des mathematischen Wortschatzes und die Entwicklung geeigneter Materialien für den Mathematikunterricht. Das Problem ist hier etwas anders als bei den unter (1) genannten Sprachen, da bei diesen „lokalen Sprachen“ die Zahl der Sprecher oft deutlich geringer ist als bei den Nationalsprachen und es daher an ideellen und materiellen Ressourcen mangelt, um diese Aufgaben zu bewältigen (z. B. muss es ja genügend Lehrer geben, die in diesen Sprachen kompetent sind).

Ebenfalls mit der Unterstützung der UNESCO hat 1984 ein Symposium in Kalkutta stattgefunden. In den *Proceedings of Seminar-cum-workshop on mathematical linguistics, mathematical language, and interaction with mathematical education* (1984) findet man zu diesem Thema noch weiteres interessantes Material, vor allem auch zu den Problemen der Kompetenz in einer Zweitsprache und zur Entwicklung des mathematischen Registers durch Sprachplanung. Es werden sogar Vorschläge zur Einführung neuer d. h. vereinfachter Zahlwörter für die Sprachen Bengali und Hindi diskutiert.

Obwohl die Mathematik, wie sie weltweit betrieben und unterrichtet wird, sicher durch die „westliche“ technologische Kultur geprägt ist, wird heute zu Recht auf die Universalität der Mathematik und die weltweiten Wurzeln der Mathematik verwiesen. Die Einbeziehung von historischen und ethnographischen Daten hat hier eine Reihe interessanter Erkenntnisse erbracht, die selbst wieder zu einer Verlebendigung des Mathematikunterrichts beitragen könnten. Zu nennen sind hier etwa die Publikationen GERDES 1990, BISHOP 1991, ELLERTON & CLEMENTS 1991, JOSEPH 1992, NELSON & JOSEPH & WILLIAMS 1993 und D’AMBROSIO 1995, 1996.

Einige wenige weitere bibliographische Hinweise auf Arbeiten, die von der Verschiedenheit der Kulturen und Versuchen ihrer Integration im Zusammenhang mit Mathematikunterricht handeln, scheinen dennoch angebracht. Dabei muss betont werden, dass zwei Aspekte der Frage des Mathematikunterrichts auf dem Hintergrund verschiedener Sprachen und Kulturen, über das wissenschaftliche Interesse hinaus, für den Mathematiklehrer wichtig sein können:

(1) Die sprachliche Komponente beim Lernen und Lehren von Mathematik kann durch den Kontrast mit den Ausdrucksmitteln einer anderen Sprache verdeutlicht werden.

(2) In vielen Schulen gibt es eine Reihe von Kindern, deren Muttersprache nicht Deutsch ist. Eine sensible Beachtung der daraus entstehenden Probleme ist daher pädagogisch geboten.

---

[9] Es sollte darauf hingewiesen werden, dass es sehr empfehlenswert erscheint, wenn die Muttersprache des Kindes Teil des Schulunterrichts ist. Die Anzahl einschlägiger Untersuchungen ist sehr groß. HAILE (1994) etwa weist nach, dass der Mathematikunterricht in Amharisch bei Kindern in Addis Abeba positiv mit der Schulleistung korreliert.

[10] Untersuchungen zeigen immer wieder, dass den Schülern beim Mathematiklernen in einer Zweitsprache Schwierigkeiten erwachsen (siehe z. B. MESTRE & GERACE 1986).

Lesenswert ist etwa der Beitrag von WATSON (1990), der die grundlegende Verschiedenheit des Begriffsbildungssystems der Yolgnu (Northern Territory, Australien) und des uns geläufigen Begriffsbildungssystems, welches als „Conceptual structure of the Western knowledge" bezeichnet wird, aufzeigt. Insbesondere findet die Autorin, dass die Strategie rekursiver Muster auf zwei Arten verwirklicht werden kann: bei den Yolgnu durch das *gurrutu*-System, welches in erster Linie die genealogischen Beziehungen regelt und in der „Western knowledge" durch den Aufbau der Zahlwortreihe (die aber keineswegs als typisch „Western" anzusehen ist). Ebenfalls mit der Situation australischer Völker beschäftigen sich HARGRAVE (1982) und HARRIS (1991).

DALE & CUEVAS (1987) beschäftigen sich mit dem Lernen von Mathematik in englischer Sprache durch Schüler, für die Englisch nicht Muttersprache, sondern ihre Zweitsprache ist (in sog. ESL-Klassen). Sie wenden Befunde über den engen Zusammenhang zwischen sprachlicher Tüchtigkeit und Leistungsfähigkeit einerseits und mathematischen Lernerfolgen andererseits bei monolingualen Schülern auf diese spezielle Situation an und kommen so zur Forderung nach einer engen Verknüpfung von Mathematiklernen und sprachlicher Förderung. Die Schüler sollen im Unterricht nicht nur mittels Sprache Mathematik lernen, sondern auch mittels Mathematik sprachliche Förderung erfahren. An Beispielen werden sprachspezifische Strategien für den Mathematikunterricht aufgezeigt, die sich durchaus allgemein, also auch für das Lernen von Mathematik in der Muttersprache, als nützlich erweisen können. Danach hat der Lehrer bei der Planung und Gestaltung seines Unterrichts nicht nur die inhaltlichen Anforderungen zu analysieren, die entsprechenden Voraussetzungen bei den Schüler zu überprüfen und für sie geeignete Unterrichtsmaßnahmen zu entwickeln, sondern das gleiche auch für den Bereich der Sprache zu leisten. Er muss die sprachlichen Mittel, die bei einem Thema Verwendung finden sollen, sorgfältig analysieren und darauf bezogen, die sprachlichen Fähigkeiten der Schüler genau diagnostizieren: Welche der zu verwendenden Ausdrücke und Symbole kennen die Schüler bereits? Können sie diese lesen, schreiben, definieren und in ihrem strukturellen Zusammenhang verstehen? Im Anschluss daran können sprachfördernde Maßnahmen geplant und konsequent in den Unterricht integriert werden.

Auf den großen internationalen Kongressen zum Mathematikunterricht ist das Thema Sprache und Mathematik fast immer durch Referate und Arbeitsgruppen vertreten. In den *Proceedings 4th International Congress Mathematical Education* 1980 diskutiert GNERRE (1983) die Frage, ob angesichts der von den europäischen Sprachen beeinflussten mathematischer Symbolsprache ein Unterricht in Spanisch oder in Jivaro (einer Sprache, die im Amazonasgebiet in Brasilien gesprochen wird) vorzuziehen wäre. Über ähnliche Probleme im Japanischen, die insbesondere mit der Wortstellung im Japanischen zusammenhängen könnten, berichtet HOSOI (1983). Soziolinguistische Probleme stehen im Zentrum des Beitrags YOUNG (1983) über die Situation in Jamaica. Es kann nur erwähnt werden, dass in diesen Proceedings auch schöne Überblicksartikel zum Thema Mathematik und Sprache enthalten sind (wie etwa HOWSON 1983, LABORDE 1983, LOWENTHAL 1983 und PELLEREY 1983).

In den beiden nachfolgenden Kongressberichten *Proceedings 5th International Congress Mathematical Education* 1984 und *Proceedings 6th International Congress Mathematical Education* 1988 finden sich die Berichte über Arbeitsgruppen, in denen in Referaten und Diskussionen über die Probleme von Mathematik und Sprache, aber auch speziell das Thema Mathematikunterricht in den vielen Sprachen der Welt bzw. in einer Zweitsprache angesprochen wurde. Die zahlreichen interessanten Einzelheiten können in den Kongressberichten nachgelesen werden. Von den zahlreichen Arbeitsgruppen, die auf dem Kongress 1992 zusammengetreten sind, hat die Working Group 10 'Multicultural and Multilingual Classrooms' die Tradition fortgeführt (siehe *Proceedings Seventh International Congress on Mathematical Education* 1992, S.154 - 159). Es ist schade, dass viele dieser Bemühungen immer noch als Projekte einzelner Lehrer oder Pädagogen oder kleiner engagierter Gruppen erscheinen, die weltweite Vernetzung und die kulturpolitische Umsetzung aber noch weiterentwickelt werden müsste.

2.1.3 Mathematische Lerninhalte und Lernziele

Das, was die Schüler im schulischen Unterricht von Mathematik lernen, lässt sich grob gliedern in mathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten. Im Bereich des Wissens sind die Begriffskenntnisse von besonderer Bedeutung und verdienen daher gesonderte Aufmerksamkeit. Die übrigen Wissensinhalte lassen sich unter der Bezeichnungen Kenntnisse zusammenfassen.

Mathematische Begriffe lassen sich als vernetztes Wissen über mathematische Objekte, Beziehungen, Operationen und Strukturen charakterisieren. Auf verschiedenen Schulstufen treten als Lerninhalte auf

- arithmetische Begriffe wie Zahlbegriffe und Begriffe von Zahlmengen (z. B. GANZE ZAHLEN, BRUCHZAHLEN bzw. RATIONALE ZAHLEN), Relationsbegriffe wie IST KLEINER ALS, IST GRÖßER ALS, IST GLEICH, Operationsbegriffe wie ADDIEREN, DIVIDIEREN und Strukturbegriffe wie STELLENWERTSYSTEM;
- algebraische Begriffe wie VARIABLE, TERM, GLEICHUNG, GLEICHUNGSSYSTEM, RELATION, FUNKTION, GRUPPE, RING, KÖRPER;
- geometrische Begriffe wie GERADE, STRECKE, WINKEL, QUADRAT, TRAPEZ, POLYGON, DREIECK, HYPOTENUSE, UMKREIS, QUADER, PRISMA, PYRAMIDE, POLYEDER, SEHNE, TANGENTE, WINKELHALBIERENDE, HÖHE, RADIUS, LÄNGE, FLÄCHENINHALT, VOLUMEN, INZIDIEREN, SICH SCHNEIDEN, PARALLEL, SENKRECHT, KONGRUENT, ZERLEGUNGSGLEICH, INHALTSGLEICH, ACHSENSPIEGELUNG, ZENTRISCHE STRECKUNG;
- stochastische Begriffe wie HÄUFIGKEIT, WAHRSCHEINLICHKEIT, MITTELWERT, STANDARDABWEICHUNG, KORRELATION und
- Begriffe der Analysis KONVERGENZ, STETIGKEIT, ABLEITUNG, DIFFERENZIERBARKEIT, INTEGRAL, usw.

  Zu den Lerninhalten des Mathematikunterricht gehören neben den Begriffen:
- Kenntnisse von (Lehr-)Sätzen, z. B. von Rechensätzen (Einspluseins- und Einmaleinssätzen), von Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen, von Umrechnungszahlen für konventionelle Größeneinheiten, von Vorzeichenregeln für das Rechnen mit ganzen Zahlen und Verknüpfungsregeln für Bruchzahlen in Bruchschreibweise und für Potenzen, von Berechnungstermen (Formeln) und Lehrsätzen (algebraischen und geometrischen) einschließlich zugehöriger Ableitungen bzw. Beweise, und
- Kenntnisse von Verfahren (Algorithmen), z. B. für schriftliches Rechnen, für das Umformen und Berechnen von Termen, für das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, für das Darstellen von Funktionen, für geometrische Konstruktionen, aber auch Verfahren der Vektorrechnung, des Differenzierens und des Integrierens.

  Darüber hinaus gilt es noch, Kenntnisse zu erwerben, die sich in Form bedeutsamer Wissenselemente in komplexere kognitive Besitzstände oder Fähigkeiten integrieren sollen.

  Das mathematische Wissen der Schüler sollte nicht auf eine reproduzierbare sprachliche Speicherleistung reduziert sein; die Schüler sollen es verstanden haben. Das Verstehen mathematischen Wissens hat nach MAIER (1995) zwei inhaltliche Dimensionen. Zum einen bedeutet es, dass seine verbale und symbolische Repräsentation so eng mit – möglichst konkreten bzw. anschaulichen – Objekten und Handlungen verknüpft ist, dass dem Wissenden jederzeit eine Zuordnung bzw. ein expliziter oder wenigstens impliziter Transfer zwischen beiden möglich ist (modale Dimension des Verstehens). Zum zweiten sollte jedes verstandene Wissenselement verschiedene kognitive Komponenten aufweisen (mentale Dimension des Verstehens). Diese Komponenten sind
- ein Wissen um die charakterisierenden Merkmale des Begriffs, Satzes oder Verfahrens, einschließlich der Fähigkeit Beispiele von Referenzobjekten und Referenzhandlungen von Gegenbeispielen zu unterscheiden (konzeptuelle Komponente);

- ein Wissen um Prozesse, die zur Konstruktion des Begriffes, Satzes oder Verfahrens nötig sowie um Handlungsmöglichkeiten, die mit ihnen verbundenen sind (prozedurale oder funktionale Komponente);
- ein Wissen um die in dem Begriff, Satz oder Verfahren vorzufindenden gegenständlichen Beziehungen und ihre Beziehungen zu anderen Begriffen, Sätzen oder Verfahren (relationale oder strukturelle Komponente);
- ein Wissen um die in dem Begriff, Satz oder Verfahren bestehenden logischen Beziehungen sowie die logischen Beziehungen zu anderen Begriffen, Sätzen oder Verfahren (argumentative Komponente);
- ein Wissen um mögliche Formen der Verwendung bzw. Anwendung des Bgriffs, Satzes oder Verfahrens (elaborative Komponente) und evtl.
- ein Metawissen über den Begriff, den Satz oder das Verfahren (reflexive Komponente).

Das Mathematiklernen kann und sollte sich freilich nicht auf den Erwerb von Wissen im Sinne normierter und vorstrukturierter Systeme von Begriffen, Sätzen und Verfahren beschränken. Gewichtige Stimmen (WAGENSCHEIN 1965, POLYA 1967[2], KLEIN 1968, FREUDENTHAL 1973) lehnen einen Mathematikunterricht in "Fertigbauweise" ab und fordern statt dessen programmatisch, "Mathematik als Tätigkeit" (FREUDENTHAL) zu betreiben. Dies verlangt, dass die Schüler für mathematisches Tun typische <u>Fähigkeiten</u> erwerben. LENNÉ (1969) spricht von „mathematischen Denkformen“ und „allgemeinen Qualifikationen“, WINTER (1972) zum einen von „allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten“, zum anderen von geistigen Grundtechniken. BAUER (1978 und 1988) stellt für das schulische Mathematiklernen eine Liste von „Prozesszielen“ zusammen, die er den „Produktzielen“ gegenüberstellt. Dazu gehören die Fähigkeit zum Beschreiben mathematischer Objekte, Beziehungen und Strukturen, das Definieren mathematischer Begriffe, das Klassifizieren, Ordnen, Systematisieren und Strukturieren mathematischer Objekte und Beziehungen, das Generalisieren und Abstrahieren mathematischer Begriffe und Erkenntnisse, das Analysieren mathematischer Situationen einschließlich des Unterscheidens von Fällen, das Synthetisieren und Verknüpfen, das Transformieren, das Kombinieren, das plausible und das logische Schließen, das Beweisen, das Mathematisieren, usw.

Eine Gliederung mathematischer Lerninhalte und Lernziele nach Begriffsaufbau, Erwerb von Kenntnissen und Förderung mathematischer Fähigkeiten verlangt, auch auf die <u>Zusammenhänge zwischen diesen drei Bereichen</u> hinzuweisen:

- Zum einen sollten die Lernenden neues mathematisches Wissen nicht passiv rezipierend aufnehmen, sondern es sich in aktiver und unmittelbarer Auseinandersetzung mit dem Gegenstand, also ‘tätig’ zueignen: experimentierend, forschend, entdeckend. Ausgangspunkt dafür sind Aufgaben mit Problemcharakter, d. h. situative oder kognitive Impulse, die das mathematische Denken zielgerichtet aktivieren, wobei – im Gegensatz zu mathematischen "Aufgaben" – den Schülern zumindest aktuell kein direkt oder vollständig verwendbares Lösungsverfahren verfügbar ist und sie daher selbst Lösungswege und Lösungen finden müssen. Dabei ist auf schon vorhandene mathematische Fähigkeiten aufzubauen.
- Zum anderen können die Schüler realitätsbezogene oder erdachte Problemsituationen, in denen sie mathematisch aktiviert werden und ihre mathematischen Fähigkeiten entwickeln sollen, in der Regel ohne ein gewisses Maß an Wissen nicht bewältigen. VOLLRATH (1992) zufolge dienen z. B. Begriffe zur Klärung und Umstrukturierung von Problemen und können zum Finden und Sichern der Lösung benutzt werden. Speziell bei Beweisaufgaben benötige der Problemlöser „ausreichende Eigenschaftskataloge der auftretenden Begriffe“ (S. 131), „Kenntnisse über Beziehungen zwischen den auftretenden Begriffen“ (S. 132), „die Fähigkeit, flexibel mit den einschlägigen Begriffen umzugehen. Das bedeutet insbesondere, dass er Beziehungen zu anderen Begriffen herstellen kann, um so eine neue Sicht über den Begriff und das Problem zu gewinnen“ (S. 133). So kann es ihm dann gelingen, unter der Fülle vorhandener Eigenschaften und Beziehungen die für die

Lösung entscheidenden zu erkennen, also zu akzentuieren, und „logisch diszipliniert mit den Eigenschaften der auftretenden Begriffe umzugehen“ (S. 134).

– Aber auch zwischen dem Lernen von Begriffen und Kenntnissen gibt es einen Zusammenhang. So ist der Aufbau von Begriffen zumeist nicht denkbar ohne die Verwendung von Kenntnissen, z. B. über Eigenschaften von Referenzobjekten und Verfahren ihrer Bearbeitung. Andererseits bleiben viele Satz- und Verfahrenskenntnisse ohne zugrunde liegende Begriffe unverständlich.

Trotz solcher Zusammenhänge soll nachfolgend die Rolle und Bedeutung der Sprache zunächst nur für den Aufbau von Wissen, insbesondere von Begriffen diskutiert (2.2) und dann in einem gesonderten Abschnitt für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten, d. h. das Aufgaben- und Problemlösen (2.3), untersucht werden.

2.2 Sprache und Aufbau mathematischen Wissens

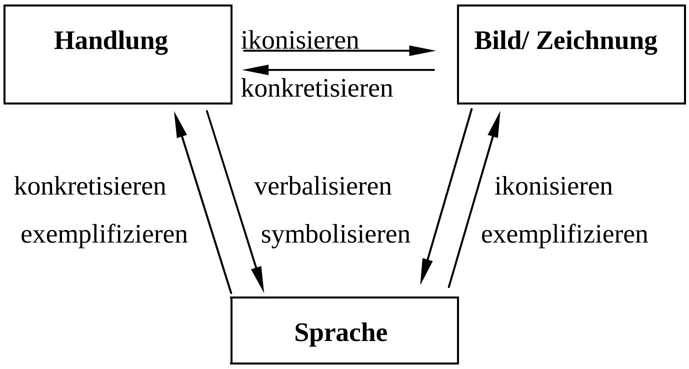
Welche Rolle spielt nun die Sprache in gesprochener und in geschriebener Form beim Aufbau mathematischer Begriffe sowie beim Erwerb von Kenntnissen von Lehrsätzen und Verfahren? Nachfolgend soll zuerst die Sprache in den Zusammenhang anderer Darstellungsformen für mathematisches Wissen gestellt (2.2.1) und dann geprüft und kritisch diskutiert werden, welche Funktion der Sprache im Rahmen dieser Lernaufgabe zukommen sollte, und zwar getrennt für den Fall, dass sich das Wissen in konkreten bzw. anschaulichen Referenzobjekten und Referenzhandlungen visualisieren lässt (2.2.2) und für den Fall, dass eine solche Möglichkeit nicht zur Verfügung steht (2.2.3).

2.2.1 Handlung, Bild und Sprache – unterschiedliche Darstellungsformen?

Für die Darstellung mathematischen Wissens entwickelte BRUNER (1971) eine Begrifflichkeit, die mit großem Erfolg Eingang in die fachdidaktische Diskussion fand. Gemeint ist seine Unterscheidung zwischen drei Repräsentationsmodi: dem enaktiven, dem ikonischen und dem symbolischen. Beim enaktiven Modus denkt BRUNER an den manipulierenden Umgang mit konkreten Modellen. So, wenn etwa im mathematischen Anfangsunterricht Kinder mit Hilfe von Rechenplättchen Additions- und Subtraktionsaufgaben darstellen oder Sekundarstufenschüler mit Modellen geometrischer Körper hantieren. Im Fall des ikonischen Modus wird Wissen in Bildern oder Zeichnungen verkörpert, wie es vor allem im Bereich der Geometrie in der Sekundarstufe häufig geschieht. Dem symbolischen Modus rechnet BRUNER die Sprache in ihrer gesprochenen und geschriebenen Form zu, einschließlich der Notation in mathematischer Symbolsprache.

Mit Hilfe der BRUNERschen Darstellungsmodi lässt sich der von BAUERSFELD (1972) sogenannte „intermodale Transfer“ beschreiben. Aktivitäten des intermodalen Transfers verlangen von den Schülern gleichsam eine ‘Übersetzung’ mathematischen Wissens von einer Darstellungsform in eine andere; so, wenn beispielsweise Grundschüler eine mit Plättchen gelegte Additionsaufgabe zeichnerisch mit Kringeln darstellen, versprachlichen oder in Ziffernsymbolen notieren, oder wenn Sekundarstufenschüler sich die symbolische Darstellung eines geometrischen Sachverhalts zeichnerisch vergegenwärtigen.

Man kann die möglichen Aktivitäten des intermodalen Transfers in folgender Übersicht darstellen:



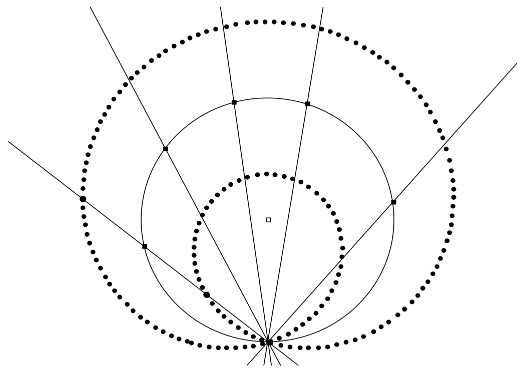
Die BRUNERsche Repräsentationstheorie ist aber aus drei untereinander zusammenhängenden Gründen zu problematisieren:

- Zum ersten lassen sich enaktive, ikonische und symbolische Darstellung keineswegs so klar voneinander abgrenzen, wie die Theorie nahezulegen scheint. Die Schwierigkeit kann an einigen Beispiele beleuchtet werden: Wenn ein Schüler im Geometrieunterricht eine Drehung dadurch darstellt, dass er ein aus Pappe ausgeschnittenes Dreieck mit Bleistift umfährt, dann in einen gegebenen Punkt um einen gegebenen Winkel dreht, um schließlich durch nochmaliges Umfahren die Bildfigur zu zeichnen, ist das eine enaktive oder eine ikonische Darstellung? Und wenn er das Pappdreieck nicht benutzt und stattdessen die beiden Figuren mit dem Geodreieck zeichnet, unterscheiden sich dann die beiden Darstellungen so stark voneinander, dass man sie verschiedenen Repräsentationsmodi zuordnen darf? Anderes Beispiel: Wenn ein Schüler die Formel $A_{\Delta} = \frac{1}{2} g \cdot h$ schreibt, ist dann das kleine Dreieck Δ ein Bild oder ein Symbol, und wäre die Frage im Falle der Schreibweise g || h für das Parallelzeichen anders zu beantworten? Wann ist die Zeichnung eines Dreiecks ein Bild und wann ein Symbol? Man kann an vielen Fällen unschwer zeigen, dass der Übergang zwischen mathematischen Zeichnungen und mathematischen Symbolen fließend ist. Man denke insbesondere an Skizzen und Diagramme.
- Das Problem der mangelnden Unterscheidbarkeit von enaktiver, ikonischer und symbolischer Repräsentation verschärft sich beträchtlich, wenn man - was BRUNER nicht oder zu wenig tut - zwischen dem Prozess und dem Produkt einer Darstellung zu unterscheidet. Man kann dann fragen, ob das Produzieren einer ikonischen oder symbolischen Darstellung nicht auch als „Handlungen“ zu betrachten ist. Warum sollten das konstruktive Erstellen oder das Verändern einer Zeichnung, das Formulieren einer Aussage und das Erzeugen eines Textes keine Handlungen sein? Spricht man nicht in der Linguistik ausdrücklich vom Sprachhandeln? Ist es wirklich sinnvoll, den Handlungsbegriff auf das Manipulieren konkreter Objekte zu beschränken? Oder muss man nicht im Fall einer Arbeit mit konkretem Material zumindest die Modellvorgabe sowie das Handlungsergebnis, vielleicht auch einige Zwischenzustände wegen ihres statischen Charakter als ‘Bilder’ auffassen? Was wäre anders, wenn diese Zustände bildhaft oder zeichnerisch dargestellt wären?
- Der entscheidende Mangel von BRUNERs Repräsentationstheorie scheint jedoch in der fehlenden Unterscheidung zwischen externen, wahrnehmbaren Aspekten der Repräsentation und den mit diesen verbundenen internen, mentalen Prozessen zu liegen. Diese Prozesse kommen bei ihm kaum in den Blick; doch scheinen gerade sie für das Mathematiklernen von entscheidender Bedeutung. Es kann für den Wissensaufbau nicht unerheblich sein, ob materialgebundene Handlungen gleichsam blind als instrumentelles Tun ausgeführt werden oder ob der Lernende sie systematisch beobachtet, analysiert und interpretiert sowie theoriegeleitet beschreibt und expliziert. Ein Bild bzw. eine Zeichnung kann als statisches Objekt wahrgenommen oder aber auf Regelmäßigkeiten und andere Beziehungen hin untersucht, in Teile gegliedert oder aus Teilen zusammengefügt betrachtet, kurz mental ‘be-hand-elt’ werden. Umgekehrt: Das Hervorbringen oder Lesen einer sprachlichen

Darstellung kann sich ganz und gar auf syntaktische Imitation und Manipulation beschränken; d. h. es ist keineswegs zwingend, dass der Lernende solche Repräsentationen mit Modellen und Modellhandlungen zu verbinden weiß und dass die Sprache für ihn bedeutungshaltig ist bzw. eine semantische oder pragmatische Dimension aufweist.

Ungeachtet dieser Problematisierung bleibt es richtig, dass sich mathematische Begriffe in verschiedener Weise darstellen lassen. Dies zeigt schon VAN DER WAERDEN (1954b) am Beispiel einer LIMAÇON genannten Kurve (zu franz. *limaçon* 'Schnecke').[11] Er unterscheidet vier Darstellungen dieser Kurve, denen dann entsprechende begriffliche Vorstellungen entspringen können:

1. Von einem Punkt einer Kreislinie aus zieht man Halbgeraden, die die Kreislinie schneiden. Von den Schnittpunkten aus trägt man auf den Halbgeraden nach beiden Seiten eine Strecke konstanter Länge ab. Indem man die so entstehenden Punkte miteinander verbindet, erhält man die Schneckenlinie.



   Zu dieser auf eine zeichnerische Handlung, einen Konstruktionsprozess bezogenen Darstellung sagt VAN DER WAERDEN: "Die erste Vorstellung ist wesentlich. Hat man sie vergessen, so hat man den Begriff der Kurve nicht mehr, auch wenn man weiß, wie sie aussieht. Die motorische Vorstellung vom Ziehen der Linien, Abtragen der Strecken usw. kann bei visuell Veranlagten auch durch die visuelle Vorstellung der gezogenen Linien und gleichen Strecken ersetzt werden. Mit Sprache hat das alles nichts zu tun: Man kann die Kurve für sich allein zeichnen und erforschen, ohne eine Mitteilungsabsicht. Das Zeichnen der Kurve ist eine Handlung, keine Gebärde."
2. Man betrachtet das Bild einer Schneckenkurve oder man zeichnet ein solches Bild ohne Zuhilfenahme spezieller Konstruktionsschritte. Dazu VAN DER WAERDEN: "Die zweite Vorstellung, die visuelle, ist zur Not entbehrlich: Aus der Erzeugungsweise der Kurve kann man ihre Gestalt jederzeit ableiten."
3. Die Kurve wird benannt oder mit Worten beschrieben. VAN DER WAERDEN: "Die dritte Vorstellung, der Name der Kurve, ist völlig unwesentlich. Denn Pascal, der die Kurve entdeckt hat, hat sie zuerst motorisch erzeugt, dann hat er gesehen, dass sie einer Schnecke gleicht und schließlich hat er ihr den Namen *Limaçon* gegeben. Er hat einen völlig klaren Begriff von der Kurve gehabt, bevor er den Namen erfand."
4. Man schreibt einen Term bzw. eine Gleichung als algebraische Darstellung der Funktion auf, zu der die Kurve der Graph ist. VAN DER WAERDEN: "Eine vierte Vorstellung, die man mit der Kurve assoziieren kann, ist die Vorstellung einer Formel, nämlich der Gleichung der Kurve. Aber diese Vorstellung ist sekundär und leicht entbehrlich: Die Gleichung der Kurve kann aus ihrer Definition jederzeit abgeleitet werden. Meistens vergißt man die Formel auch gleich wieder" (Zitate aus VAN DER WAERDEN 1954 b, S. 166 ff).

Was VAN DER WAERDEN am Beispiel der Schneckenlinie darlegt, will er durchaus auch auf andere Gebiete der Mathematik angewendet wissen. Selbst da, wo Mathematiker scheinbar nur mit formalen Gebilden umgehen,

[11] Diese Kurve ist eine Kreiskonchoide (bekanntlich wurden Konchoiden schon in der Antike untersucht, da mit Hilfe der Geradenkonchoide die Dreiteilung des Winkels gelingt; siehe etwa KAISER & NÖBAUER 1984). Entdeckt wurde sie von *Étienne Pascal*, dem Vater von *Blaise Pascal*.

wird ihre Arbeit häufig durch implizite Vorstellungen motorischer und visueller Art getragen. Sprachliche und formale Vorstellungen sind nur Stellvertreter – allerdings bequeme Stellvertreter – für Begriffe und Aussagen. Sie erleichtern das Denken. Dieses wird mit Hilfe der Sprache zu einer kollektiven Tätigkeit. In der kommunikativen Funktion liegt auch die eigentliche Bedeutung der Sprache, sagt VAN DER WAERDEN. "Es wird Übertragung und Festlegung der Gedanken möglich" (ebd., S. 172).

In einer ähnlichen Betrachtung, in diesem Fall mehr psychologisch akzentuiert und mit anderen Bezeichnungen versehen, kommt DUVAL (1994) zu der Aussage, dass sich eine geometrische Figur auf vier verschiedene Weisen auffassen lässt: Die unmittelbarste ist die perzeptive Auffassung. Sie gestattet, eine ebene oder räumliche geometrische Form bzw. einen geometrischen Begriff sofort zu identifizieren oder zu erkennen, nicht jedoch, ihre möglichen Funktionen in Betracht zu ziehen und das zu erreichen, was man allgemein den mathematischen Begriff der Figur nennen könnte. Eine andere Auffassung ist die diskursive. Sie entspricht einer deduktiven Klärung mathematischer Eigenschaften der Figur, auch solcher, die nicht durch einen begleitenden Text oder durch anschauliche Vermutungen angezeigt werden; ihre epistemologischen Funktionen sind Definition und Beweis. Eine im Unterricht besonders beachtete Auffassung ist die sequentielle. Sie bezieht sich auf die Schritte der Konstruktion der Figur und verlangt, die ursprünglichen Zusammenhänge zu beachten, die zwischen ihren mathematischen Eigenschaften und den technischen Möglichkeiten des Geräts bestehen. Ihre Funktion ist die eines Modells; sie tritt am deutlichsten in einigen, dem geometrischen Konstruieren dienenden Computerprogrammen hervor und erlaubt, ihre Kenntnisse von dargestellten Objekten zu verändern. Die am wenigsten beachtete, aber nach Meinung DUVALs wichtigste Auffassung geometrischer Figuren ist schließlich die operatorische. Sie dient der heuristischen Exploration und kann den Grundgedanken einer Problemlösung oder eines Beweises aufzeigen. Dabei ist wichtig, dass die Figuren real oder mental in verschiedener Weise verändert werden: durch Zerlegen und neu Zusammensetzen, durch Vergrößern, Verkleinern oder Verformen, durch Drehung und Lageveränderung in der Ebene bzw. im Raum.

Welche Rolle spielt nun die Sprache, vor allem auch in Bezug zu den anderen Darstellungsformen beim Aufbau mathematischen Wissens; wie lässt sich ihre didaktische Funktion beschreiben?

2.2.2 Visualisierung und Sprache

Der didaktische Ort der Sprache soll zunächst für jene Formen des Aufbaus mathematischen Wissens untersucht werden, die sich auf anschauliche Modelle und Modellhandlungen stützen.

a) Empirischer Begriff – theoretischer Begriff

DÖRFLER (1984 a und b, 1988 a und b) und PESCHEK (1985 und 1989) entwickelten auf empirischer Basis eine sehr allgemeine Theorie zum Aufbau mathematischer Begriffe, die sich als Argumentationsgrundlage für eine didaktische Ortsbestimmung der Sprache im Lernprozess eignet. Dabei wird unterstellt, dass die Überlegungen, mutatis mutandis, auch für andere Bereiche des mathematischen Wissens (Kenntnisse von Sätzen und Verfahren) zutreffen. In Übereinstimmung mit konstruktivistischen Lerntheorien gehen die beiden Autoren davon aus, dass das Individuum begriffliches Wissen, angestoßen durch Wahrnehmungen, autonom konstruiert. Dabei unterscheiden sie zwischen empirischen und theoretischen Begriffen.

- Der empirische Begriff beruht auf der Abstraktion visuell wahrnehmbarer Merkmale verschiedener Gegenstände, die aufgrund gemeinsamer Eigenschaften klassifiziert werden. Er resultiert aus einem eher passiv-rezeptiven Verhältnis zur Lernumgebung. Der Begriffsaufbau gründet sich auf das Betrachten und Vergleichen von Beispielen und Gegenbeispielen.
- Der theoretische Begriff wird aus Handlungen oder Handlungsvorstellungen entwickelt. Durch eine entsprechende Aufmerksamkeitsfokussierung und die Reflexion der Handlungen werden Beziehungsstrukturen im

Handlungsablauf bzw. zwischen dessen Ausgangs- und Endzustand erschlossen, die konstitutiv für den Begriff sind. Da eine solche Beziehungsstruktur kein unmittelbar und sinnlich wahrnehmbares Merkmal ist, erwächst der theoretische Begriff stets aus einem aktiv-operativen Eingreifen in die Lernumgebung und ihrer denkenden Verarbeitung.

Die Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff muss nicht im Sinne sich ausschließender Alternativen aufgefasst werden; beide können sich, komplementär, als zwei Seiten ein und desselben Begriffs durchaus sinnvoll miteinander verbinden. Allerdings erweisen sich ausschließlich empirische Begriffe im Bereich der Mathematik aus verschiedenen Gründen als nicht ausreichend:

– Empirische Begriffe sind mit der Ungenauigkeit der Wahrnehmung behaftet. Ein
– formalisierten Handhabung gibt es für empirische Begriffe nicht.

Zusammenfassend kann man sagen: Nur theoretische Begriffe bzw. theoretisches Wissen erfüllen jene Kriterien, die oben als charakteristisch für Verstehen genannt wurden; sie weisen in der mentalen Dimension eine konzeptuelle, prozedurale (funktionale), relationale, argumentative, elaborative und reflexive Komponente auf und erlauben in der modalen Dimension den Transfer zwischen den verschiedenen Darstellungsformen, insbesondere zwischen der anschaulichen und der sprachlichen Repräsentation.

b) Theoretisches Wissen und sprachliche Kommunikation

Sollen die Lernenden über bloß empirisches Wissen hinauskommen und zu theoretischem Wissen vordringen, so muss der Lehrer zunächst für sie Modelle auswählen, die adäquate manuelle, zeichnerische oder mentale Handlungen anregen und das Entdecken relevanter Beziehungen und Strukturen ermöglichen. Dann muss er aber auch eine intensive sprachliche Kommunikation organisieren, an der jeder einzelne Schüler aktiv beteiligt ist. Dies hat folgende Gründe:

– Zum ersten ist theoretisches Wissen auch aus überlegt und gut gewählten Modellen nicht unmittelbar ableitbar; Modelle sind nicht selbstevident. Vielmehr muss der einzelne Schüler das Wissen erst durch Interpretation erarbeiten. Diese Interpretation muss der Lehrer mit sprachlichen Mitteln anstoßen. Er muss die Aufmerksamkeit der Schüler auf bestimmte Perspektiven und Betrachtungsweisen lenken und auf begriffsrelevante Beziehungen und Beziehungsstrukturen fokussieren. Für die Schüler ist sodann die von ihnen zu verlangende sprachliche Explikation – das Sprechen über ihre Beobachtungen, Einsichten und Erkenntnisse – ein wichtiger Impuls, über die Beziehungen bzw. Strukturen zu reflektieren. Dies wird zu einem wichtigen Anstoß, bewußt zu handeln, sich über die gemachten Erfahrungen Klarheit zu verschaffen und sie rational zu ordnen. Die Sprache dient aber auch dazu, relevante Begriffsmerkmale in einer Definition festzuhalten, Wissen in Form von Lehrsätzen in angemessener Weise zu formulieren und Verfahrensschritte genau zu beschreiben. Schließlich kann sie als Hilfe bei der Strukturierung der Modellsituation die gewünschten Prozesse der Abstraktion und Generalisierung fördern.

  Wenn z. B. ein Lehrer nach dem methodischen Muster der semantischen Integration (MAIER 1977) den Begriff PARALLELOGRAMM anhand eines aus Papier oder Pappe ausgeschnittenen oder aufgezeichneten Modells ‘einzuführen’ versucht, braucht es der Sprache; zum einen, um die Aufmerksamkeit der Schüler auf bestimmte Teile oder Merkmale der Figur zu lenken und z. B. durch (physikalisches) Nachprüfen die Parallelität und Längengleichheit gegenüberliegender Seiten ‘finden’ zu lassen. Zum anderen, um zu verhindern, dass die Schüler in ihrer Interpretation der Figur Eigenschaften festhalten, die nicht Bestandteil der vom Lehrer angestrebten Definition sind und das spätere Erkennen von Parallelogrammen, insbesondere von Sonderformen erschweren. Es kann sich z. B. dabei um ein bestimmtes Längenverhältnis zwischen benachbarten Seiten, eine bestimmte Lage der längeren Seiten in der Zeichenebene oder eine bestimmte ‘Schräge’ der kürzeren Seiten handeln. Der Lehrer kann unerwünschte Interpretationen zu vermeiden versuchen, indem er seine eigene

Deutung sprachlich erläutert. Dieses wird ihm erleichtert, wenn er im Sinne des Verfahrens der Modellvariation (MAIER 1977) den Schülern verschiedene Modelle zum Begriff vorlegt, bei denen die variablen Eigenschaften unterschiedlich ausgeprägt sind; oder indem er stärker handlungsorientierte Modelle einsetzt, z. B. das Erzeugung von Parallelogrammen durch Kreuzen unterschiedlich breiter Papierstreifen (Transparentpapier), das Bewegen eines in den Ecken mit Gelenken versehenen Vierecksrahmens mit gegenüberliegend gleich langen Stäben, das Aneinanderfügen zweier kongruenter Dreiecke bzw. die Punktspiegelung eines Dreieck an einer Seitenmitte. Doch selbst hier wird nur ein eingehendes Sprechen über die Deutung der Modelle dem Ziel näher führen, dass möglichst viele Schüler einen hinreichend allgemeinen und präzisen Begriff PARALLELOGRAMM aufbauen. Schließlich muss für den Begriff eine geeignete Definition formuliert werden.

- Zum zweiten sind Modelle in aller Regel nicht eindeutig und lassen neben der vom Lehrer gewünschten bzw. seiner Modellkonstruktion zugrunde gelegten auch andere, von dieser abweichende Deutungen zu. Ihre Interpretation durch die Schüler kann individuell beträchtlich variieren und von der beabsichtigten Interpretation erheblich abweichen (siehe z. B. FELLER 1983, SCHIPPER & HUELSHOFF 1984 und RADATZ 1986). Er bedarf daher eines, an sprachliche Kommunikation gebundenen Gedankenaustausches, in dem sich jeder einzelne Schüler der angemessenen bzw. erwünschten Interpretation vergewissern kann. Nehmen wir an, der Lehrer legt als Modell zum Formulieren und Begründen des Lehrsatzes von Pythagoras das bekannte Parkettierungsmodell vor, wo ein aufgezeichnetes Quadrat zum einen mit vier rechtwinkeligen Dreiecken und den zugehörigen Kathetenquadraten, zum anderen mit den gleichen Dreiecken und dem zugehörigen Hypotenusenquadrat ausgelegt wird. Er wird die Schüler auf erkennbare Eigenschaften und Beziehungen aufmerksam machen und diese sprachlich beschreiben lassen. Indem die Schüler darüber sprechen, wie sie das Modell deuten, können sie ihre je individuellen Interpretationen der Erprobung auszusetzen und sich vergewissern, ob sie der vom Lehrer erwarteten entsprechen oder dieser zumindest nicht widersprechen. Der Lehrer seinerseits muss die bei Schülern zutage tretenden Deutungen nötigenfalls durch seine eigene ergänzen oder ihnen allenfalls seine eigene entgegensetzen. Auch dies bedarf der sprachlichen Form. Die Sprache dient beim Einsatz anschaulicher Modelle zur Validierung bzw. Verifizierung der schülerseitigen Modellinterpretationen durch den Lehrer wie durch die Schüler selbst.
- Zum dritten können anschauliche Modelle das angestrebte Wissen zumeist nur ausschnitthaft oder ungenau repräsentieren. Was können z. B. einzelne konkrete Modelle über den gesamten Umfang des Begriffs PRISMA aussagen? Welch unzulängliches Bild liefert ein Strich begrenzter Länge auf einem Papierblatt vom Begriff GERADE? Die Monotonie der Gleichheitsbeziehung lässt sich mit einem konkreten Waagemodell nur für sehr einfache Zahlengleichungen mit Additions- und Multiplikationstermen und für beidseitiges Addieren darstellen. Gleichungen, die Variablen enthalten, sind hier kaum sinnvoll zu repräsentieren. Da also kaum ein Modell in der Lage ist, alle Aspekte eines mathematischen Begriffs vollständig zu repräsentieren, bedarf es der ergänzenden, modifizierenden und korrigierenden Erläuterung, die nur in sprachlicher Form gegeben werden kann. Werden mehrere Modelle herangezogen, die verschiedene Aspekte eines aufzubauenden Begriffs abdecken, so kann wiederum nur ein Prozess der sprachlich-kommunikativen ‘Bearbeitung’ gewährleisten, dass die Aufmerksamkeit auf begriffs- bzw. wissensrelevante Gemeinsamkeiten gelenkt und von irrelevanten Merkmalen als Varianten abgesehen wird. So kann auch vermieden werden, dass die Modelle als getrennte Wissensbereiche gelernt, anstatt als Grundlage einer einheitlichen Begriffsbildung aufgefasst werden.

c) Sprache – Endstufe im Abstraktionsprozess?

Die vorausgehenden Überlegungen machen auch schon deutlich, dass der Gebrauch der Sprache durch die Schüler im Lernprozess der modellgebundenen Arbeit nicht nachfolgen darf, sondern sie begleiten muss. Die Sprache kann ihrer Funktion der Strukturierung, Ergänzung und Verifizierung der Modellerfahrungen nur gerecht werden, wenn Handeln und verbale bzw. schriftliche Darstellung von Anfang an eng aufeinander bezogen sind. Sie müssen sich so eng miteinander verschränken, dass der Transfer von einem Darstellungsmodus zum anderen (der intermodale Transfer) jederzeit möglich ist und bleibt. BRUNER (1971) schreibt zum Lernen auf der Basis von anschaulichen Modellen, begriffliches Denken sei in dem Maße erreicht, wie sich die zunächst relativ selbständige, durch Sozialisation erlernte sprachliche Darstellung mit der handlungsgebundenen und bildhaften verbinde. Umgekehrt könne das Kind, sobald es Erfahrungen sprachlich verschlüsselt, die Erfahrung mit zusätzlichen Inhalten anreichern, indem es die ihr innewohnenden Bedeutungen einbezieht. Die Sprache wird im Laufe der Entwicklung immer wirksamer und gewichtiger in die Organisation der Erfahrungen eingeschaltet. Die sprachliche Formulierung von Beziehungen und Merkmalen erweitert ebenso wie die Benennung von Objekten und Ereignissen die Möglichkeit einer begrifflich denkenden Bewältigung der Umwelt.

Pädagogen wie *Pestalozzi*, *Herbart* und *Diesterweg* hatten – im Anschluss an empiristische Erkenntnistheorien – ein auf Anschauung gegründetes Lernen gefordert. Die erste ernsthafte methodische Ausgestaltung dieses Grundsatzes für den Bereich des rechnerischen Erstunterrichts geht auf den Nestor der deutschen Rechendidaktik, *Kühnel,* zurück. Seine Forderungen wurden in den 60er und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts aufgegriffen und von Rechendidaktikern wie *Breidenbach* und *Oehl* unterrichtsmethodisch auch für das Lernen in höheren Jahrgangsstufen weiter ausgearbeitet.

Um dem Grundsatz der Anschauung bzw. des anschauungsgebundenen Lernens gerecht zu werden, schien es nahe liegend, den Aufbau mathematischen Wissens damit zu beginnen, dass man dieses durch Referenzobjekte in Form konkreter Modelle repräsentiert. Zahlbegriffe und Zahloperationen werden mit Mengen realer Objekte (Dinge der Natur, Spielsachen, Blöcke, Plättchen, usw.) und deren Bewegung bzw. Veränderung dargestellt. Die positionelle Zahldarstellung sowie schriftliche Rechenverfahren werden durch Bündeln und Tauschen solcher Objekte, durch die Arbeit mit so genannten Systemblöcken, mit Tauschmarken, Spielgeld, Nachbildungen eines Abakus u. ä. erklärt. Geometrische Formen und Beziehungen, geometrische Abbildungen sowie inhaltserhaltende Transformationen (z.B. zur Ableitung von Berechnungsformeln) erscheinen als handhabbare körperhafte, flächenhafte oder linienhafte Modelle (z.B. Plexiglaspyramiden, aus Papier ausgeschnitten oder mit Schnüren gezogene Figuren, usw.), Abwicklungen; usw.

Der Arbeit mit konkreten Modellen sollte dann als zweite Stufe des Lernprozesses der Umgang mit zeichnerischen Darstellungen für mathematische Objekte folgen. Nun werden Zahlen und Zahldarstellungen in Gegenstands- oder Kringelbildern, Zahloperationen durch deren Veränderung (z.B. durch Durchstreichen oder Abdecken) repräsentiert, Brüche bzw. Bruchzahlen durch teilweise markierte Flächen oder Strecken, geometrische Objekte und deren Transformationen durch Figurenzeichnungen, usw.

Schließlich folgte als letzte Stufe im Lernprozess der Übergang zur sprachlichen Darstellung, oftmals getrennt in eine erste Teilstufe der verbalen und eine zweite der schriftlichen bzw. symbolischen Darstellung. Die mathematischen Objekte werden benannt, verbal beschrieben und definiert, mit Zeichen abgekürzt bzw. in Symbolen dargestellt. Damit sollte die höchste Stufe der Abstraktion erreicht sein. Nun werden die Begriffe ohne Bezug zu anschaulichen Modellen benutzt und die anschaulich demonstrierten oder erklärten Verfahren formal geübt. Die Sprache bzw. die sprachliche Darstellung ist Endstufe und zugleich Ziel in einem nach Abstraktionsstufen gegliederten Lernprozess.

Diese methodischen Stufen der Abstraktion finden sich schon bei *Pestalozzi*, für den sich „verständiges Lernen“ in den Stufen „Anschauung“, „Vorstellung durch Eigenschaftsbestimmung“ und „Begriffsbildung“ vollzieht. Später wurden sie vor allem von Schülern *Herbarts* zu Formalstufenmodellen für den Aufbau von Unterrichtseinheiten ausgebaut. In der Praxis wurde dies zumeist so aufgefasst, dass der Umgang mit konkreten didaktischen Modellen nicht nur am Beginn des Lernprozesses zu stehen habe, sondern dass er auch – gleichsam selbstwirksam – zur Möglichkeit und zum Verstehen der zeichnerischen Repräsentation, und diese wiederum ‘automatisch’ zur Fähigkeit der sprachlich-formalen Darstellung und damit zum Aufbau abstrakten mathematischen Wissens führe. Mit anderen Worten: Wenn das Lernen so organisiert wird, dass die Schüler zuerst an konkreten, dann an zeichnerischen Modellen arbeiten und das Wissen schließlich in verbaler und schriftlich-symbolischer Sprache darstellen, dann sei das die sichere Gewähr dafür, dass die begriffliche Abstraktion eintritt. Der Aufbau des mathematischen Wissens vollzieht sich für alle Schüler gleichermaßen in methodisch planbaren Stufen mit modal unterschiedlichen Aktivitäten.

Den gleichen methodischen Normen folgten auch mathematikdidaktische Unterrichtskonzepte, die im Anschluss an die genetische Psychologie von *Piaget* entwickelt wurden. Sie unterzogen zwar die ‘Veranschaulichung’ des Wissens durch den Lehrer einer scharfen Kritik und forderten an dessen Stelle materialgebundenes, selbständiges Handeln der Schüler. Dies veränderte auch, vor allem im Bereich der Grundschulmathematik, durch den Einsatz zahlreicher Schülerarbeitsmittel die ersten Lernschritte im Abstraktionsstufenkonzept, ließ allerdings dessen Grundidee und Gesamtstruktur der Abstraktionsstufen unangetastet. Auch die Möglichkeit der Beschreibung des Modelltransfers und der mit ihm verbundenen Aktivitäten mit Hilfe der BRUNERschen Begrifflichkeit führte vielleicht zur Einführung einiger neuer Aufgabentypen in das unterrichtliche Lernen, jedoch nur in den seltensten Fällen zu einer Ablösung der beschriebenen Abstraktionsstufenmethodik. Sie wurde im Gegenteil weithin als Bestätigung für eine methodische Stufenfolge Handlung – Bild – Sprache interpretiert und der intermodale Transfer nicht als durchgehendes Lernprinzip praktiziert. Vielmehr blieb die sprachliche Darstellung eine isoliert bearbeitete End- und Zielstufe des Lernprozesses, die es möglichst rasch zu erreichen gilt, indem sich die Schüler von anschaulichen Vorstellungen und Darstellungsmöglichkeiten lösen, in abstrakten Kategorien denken und sich in formaler Darstellung auszudrücken lernen.

Aus Untersuchungen ist inzwischen bekannt, dass die Lernenden vielfach den Zusammenhang nicht erkennen, den der Lehrer zwischen den Stufen des von ihm organisierten Lernprozesses sieht und der die Grundlage des Wissensaufbaus in Abstraktionsstufen darstellt. Vielmehr nehmen viele Schüler die Arbeit auf den verschiedenen Stufen als getrennte, für sie voneinander isoliert bleibende Wissensinhalte wahr, z. B. als Rechnen mit Plättchen, als Rechnen mit Kringeln und als Rechnen mit Ziffern. LAWLER (1981) spricht von „Mikrowelten“, die sich im Denken der Schüler ausbilden und BAUERSFELD (1983) fängt die individuell unterschiedliche, von der Lehrerabsicht u. U. stark abweichende Wissensorganisation der Schüler in dem Begriff des „Subjektiven Erfahrungsbereichs“ ein. Die Stufen des modellgebundenen Arbeitens werden nicht als Grundlage und Vorbereitung für das ‘abstrakte Wissen’ erlebt, sondern als zusätzlicher Lerninhalt. Soll der erwünschte Zusammenhang zwischen beiden hergestellt werden, so darf sich die Arbeit mit den verschiedenen Darstellungsmodi nicht in getrennt aufeinander folgenden Stufen abspielen.

Vieles spricht dafür, das Mathematiklernen in Abstraktionsstufen, zumindest in der beschriebenen Form, nicht länger als ein geeignetes methodisches Konzept für den Aufbau mathematischen Wissens zu betrachten. Eine Neubestimmung des didaktischen Orts der Sprache im Lernprozess scheint geboten. Die sprachliche Darstellung in ihrer verbalen wie schriftlichen Form darf nicht als isolierte Stufe gesehen und behandelt werden, sondern muss sich von Beginn des Lernprozesses an mit den Darstellungen in konkreten und zeichnerischen Modellen verbinden. Die verbale und symbolische Darstellung muss sich von Anfang an aufs Engste mit Modellhandlungen und modellgebundenen Vorstellungen verbinden. Wichtig sind daher von Anfang an Aufgaben, in denen die Schüler anschauliche Darstellungen in sprachliche überführen, Aktivitäten des intermodalen Transfers.

Dabei darf der intermodale Transfer zwischen der anschaulichen und der sprachlich-symbolischen Darstellung keine Einbahnstraße bleiben. Er muss den ganzen Lernprozess hindurch immer wieder beide Richtungen einschlagen. Dieser darf nicht als eine gerichtete Bewegung vom Konkret-Anschaulichen zum Sprachlich-Abstrakten gesehen wird und sein Ziel sollte auch nicht die Loslösung der Begriffe und des Wissens von anschaulichen Vorstellungen und Bezügen sein. Vielmehr müssen die Schüler sich erworbenes und abstrahiertes Wissen jederzeit anschaulich vergegenwärtigen und auf konkrete Situationen anwenden können.

Auch JANVIER (1987) betont die Bedeutung von Aktivitäten des symmetrischen Transfers zwischen den Darstellungsweisen. Am Beispiel der Funktionen untersucht er die 'Übersetzungsprozesse' zwischen verbaler Beschreibung, Tabelle, Graph und Formel und kommt bezüglich der Rolle der Sprache zu dem Schluss: „...but our research results equally show that in the process language or words play a central role. Actually, we noted that verbal tags were given to the relevant elements and the execution of the process was carried out through an efficient handling of those verbal tags. In a way, source and target were verbally simplified. Even in a 'graphical context', the speech appeared to be essential" (S. 30).

d) Visualisierung und Begriffsaufbau

Die oben deutlich gewordene Präferenz für theoretisches Wissen sollte keineswegs bedeuten, dass anschauliche Modelle zu dessen Aufbau nichts oder nur wenig beitragen könnten. Um die Funktion der Anschauung beim Aufbau theoretischer Begriffe zu beschreiben, führt DÖRFLER (1984a) den Begriff der „Visualisierung" ein. Er meint damit nicht einfach alles, was optisch wahrnehmbar ist – das wären ja auch Buchstaben und mathematische Symbole –, sondern die Bereitstellung von Mitteln der Kommunikation, „in deren visuell wahrnehmbarer Struktur ihre Bedeutung enthalten bzw. daraus rekonstruierbar ist (etwa durch Umstrukturierung und Transformation, allgemein durch Handlungen und Operationen)" (S. 49). Ein Objekt der visuellen Wahrnehmung wird erst durch die an ihm ausgeführten Handlungen, durch einen operativen und gestaltenden Prozess zu einem Mittel der Visualisierung. Daher tragen nur illustrativ verwendete Bilder zum Begriffsaufbau wenig bei.

In Anlehnung an DÖRFLER (1988b, S. 31ff und 1984, S. 254ff) und PESCHEK (1989, S. 218) kann die Rolle der Visualisierung beim Aufbau theoretischer Begriffe wie folgt gesehen werden:

- Charakteristisch für die Genese theoretischer Begriffe ist die „Komplementarität" von Begriff und Handlung. Begriffe haben nicht nur ihren Ursprung in Handlungen, aus denen sich mittels Reflexion Beziehungsstrukturen herauskristallisieren, sondern diese Beziehungsstrukturen steuern auch neue Handlungen und ermöglichen so, diese Strukturen weiterzuentwickeln und den Referenzbereich des Begriffs zu erweitern.
- Theoretische Begriffe bilden sich in einem Wechselspiel von Abstraktion, d. h. Ablösung von konkreten Einzelhandlungen und Erfassen des Begriffsinhalts, und Verallgemeinerung, d. h. Realisierung der Handlungen in anderen Situationen und Überblick über den Begriffsumfang. Dabei können Abstraktion und Verallgemeinerung wiederholt und auf verschiedenen Stufen mathematischer Theoriebildung ablaufen. Sobald sich ein aus Handlungen entstandener Begriff gefestigt hat und die Beziehungsstrukturen selbst den Status mathematischer Objekte besitzen, können diese selbst zu Handlungsgegenständen für weitere Begriffsbildungen werden.

Bei der Bildung theoretischer Begriffe kommt somit anschaulichen Modellen vor allem die Rolle hermeneutischer Hilfen bei der Reflexion über strukturelle Beziehungen zu. Die Fokussierung der Aufmerksamkeit auf diese Beziehungen, ihr Aufdecken und ihr kognitives Erfassen, die begriffliche Ablösung vom Modell muss und sollte nicht das Verblassen oder gar Verschwinden konkreter Vorstellungen bedeuten. Es geht lediglich um die Fähigkeit zu flexiblem Übergang zu anderen Modellen oder Modellvorstellungen. Abstraktion muss auch nicht bedeuten, dass im theoretischen Begriff alle möglichen Modellbezüge gleichrangig nebeneinander stehen. Vielmehr können ein Modell oder einige Modelle aus den übrigen herausragen, indem sie eine Art prototypischen Charakter für den Begriff erhalten; so etwa ein Modell von der Gestalt eines Ziegelsteins für den Begriff QUADER oder der Inhalt eines Würfels von 1 dm Kantenlänge für die Begriffe KUBIKDEZIMETER und LITER

Für PETERS (1993) schickte sich die fachdidaktische Diskussion, angestoßen von den in Klagenfurt organisierten Workshops seit Mitte der achtziger Jahre an, „mit dem Begriff Visualisierung einen Ansatz zu einer neuen Anschaulichkeit als heuristische Strategie für den Mathematikunterricht zu entwickeln“ (S. 107; siehe auch KAUTSCHITSCH & METZLER 1984, 1985, 1989). Visualisieren übernimmt „die Voroperationen zu einer formal noch nicht gangbaren Lösung durch Umordnung präsenter Teilaspekte als Neukonfiguration zuhandener Bilder und verinnerlichter Visionen“ (ebd.). Im Bereich der Imagination soll das Darbieten von Visualisierungen Analogien provozieren, die Schüler sollen Operationen der Umstrukturierung entdecken und für sie abgespeicherte mentale Bilder abrufen und reaktivieren. „Visualisieren meint nicht statische Bebilderung, nicht zusätzliche und damit überflüssige Präsentation eines Schemas oder Diagramms, sondern analogischen Aufruf zur Erschließung von Informationen und Informationskomplexen für den Mathematikunterricht, Provokation zur durchstrukturierenden Erfassung von Beweis- oder Problemsituationen“ (S. 108). Eine fachliche Art und Weise des „Einblickgebens und Einsichtnehmens in visuelle Bilder und das Auslesen der ihnen zugrunde liegenden mathematischen Struktur“ lässt die Visualisierung zur Grundlage einer prä-symbolischen, nicht an ein Kalkül gebundenen Argumentation werden. „Ikonen werden über die Geometrie zum didaktischen Strategievorrat, Mathematikunterricht wird zur Rekonstruktion mathematischer Ideen“ (ebd.). Visualisierung sollte daher, über eine didaktische Strategie hinaus, neben Mathematisieren, Generalisieren, Formalisieren u. a. ein allgemeines Ziel des Mathematikunterrichts sein. Man denke in diesem Zusammenhang an die wichtige Rolle, die VAN DER WAERDEN der konstruktiven Darstellung des Begriffs LIMAÇON zuschreibt; diese kann durchaus als Visualisierung im Sinne von DÖRFLER aufgefasst werden kann.

Zum Problem der Anschauung im Mathematikunterricht siehe auch LORENZ (1992).

e) Sprache und Begriffsaufbau

So bedeutsam Visualisierungen für den Aufbau mathematischer Begriffe auch sein mögen, so gibt es andererseits eine ganze Reihe empirischer Befunde, die die Bedeutung der Sprache bei der Begriffsbildung belegen.

So konnte z. B. gezeigt werden, dass in gleichem Maße, wie Kinder in der Lage sind, Wahrnehmungen und Erfahrungen sprachlich zu explizieren bzw. mitzuteilen, ihre Fähigkeit steigt, die Invarianz von Quantitäten zu erkennen (Abschirmversuche) oder zweidimensionale Ordnungen zu rekonstruieren (Versuch mit Plastikzylindern). SMEDSLUND (1961) zeigte in einer Reihe von Experimenten (z. B. zum Füllverhältnis bei Gläsern), dass es einen positiven Zusammenhang zwischen dem Invarianzbegriff für Volumina und dem Niveau sprachlicher Begründungen gibt. Entsprechende Ergebnisse findet man bei den Psychologen *Rosca*, *Natadze* und *Rubinstein* (alle zitiert bei SKOWRONEK 1970).

Auch die Untersuchungen von *Kendler* u. a. zur Rolle der Sprache beim Begriffsaufbau zeigen, dass bei der Begriffsbildung mit wachsendem Alter ein "Übergang von einem einfachen Lösungsvorschlag, der dem Modell einer direkten Assoziation von Reiz und äußerer Reaktion gehorcht, zu einem komplexeren, mediierende Reaktionen einschließenden Lösungsvorgang stattfindet. Dieser Übergang ist auf eine noch genauer zu ermittelnde Art mit der Entfaltung der sprachlichen Mittel verbunden; diese Beziehung scheint nicht einfacher Art zu sein." (SKOWRONEK 1970, S. 64).

CLEMENTS & DEL CAMPO (1989) kommen zu dem Ergebnis, dass Schüler mit einem gut entwickelten Bruchzahlbegriff über kognitive Strukturen verfügen, in denen mögliche alltägliche Verkörperungen von Brüchen (z. B. das Verteilen einer Pizza an drei Leute) mit formaler mathematischer Sprache (z. B. „Wie kann man ein Drittel dieser Kreisfläche sichtbar machen?“) verknüpft sind. In einem Lernprojekt erweist sich eine Verbindung von kurzen Gruppendiskussionen mit anschließenden mündlichen Berichten und Erklärungen durch den Lehrer als besonders erfolgreich. Und dies vor allem deshalb, weil die Schüler offenbar über mentale Vorstellungen und Sprachkenntnisse verfügten, die sie in Perioden des konkreten Handelns in Gruppen (Zerschneiden von Kreisen,

u. a.) erwerben. „It can be concluded that teaching programs which result in children establishing not only mental images and verbal propositions in their cognitive structures, but also the memory of episodes involving active manipulation of physical objects, and group discussion, are likely to result in effective long-term learning taking place“ (S. 32). Die Schüler sollten befähigt werden, mathematisch zu handeln und sich dabei aller Darstellungsmodi zu bedienen. „In school mathematics, children should be freed to express themselves, creatively, and with a minimum of teacher censorship, by speaking, writing, drawing, performing, and imaging mathematics“ (S. 27).

In der von *Pawlow*, *Wygotsky* und *Lurija* beeinflussten russischen Psychologie hatte man von der Sprache als dem "zweiten Signalsystem" und ihrer "regulierenden Rolle" gesprochen. *Lurija* folgert aus Experimenten, dass die verhaltenssteuernde Wirkung der Sprache immer mehr vom Impulsaspekt zum Bedeutungsaspekt übergeht. Daneben vollziehe sich mit einer gewissen Synchronität die Entwicklung von einer 'äußeren' zu einer 'inneren' Sprache. In der Vollendung dieses Übergangs konstituiert sich nach *Lurija* ein neues und möglicherweise endgültiges Niveau im Zusammenwirken von Sprache und kognitiven Funktionen." (SKOWRONEK 1970, S. 68). LURIJA (1982) sagt: "Das Wort ist nicht nur Werkzeug der Erkenntnis, sondern auch ein Mittel zur Steuerung der höheren psychischen Prozesse" (S. 129).

GALPERIN & TALYSINA (1974[2]) interessierten sich in einem Projekt der Unterrichtsforschung für die Rolle der Handlung und der Sprache beim Erlernen der elementaren geometrischen Begriffe Linie, Winkel, Winkelhalbierende, Nebenwinkel und Senkrechte durch Schüler der 6. und 7. Jahrgangsstufe. Unter der Annahme von Stufen der Begriffsbildung (materialisierte Handlung – äußere Sprache – innere Sprache bzw. rein gedanklicher Vollzug) wurden für vier Versuchsgruppen Unterrichtsplanungen konstruiert, die sich gemäß der Art und Abfolge der Begriffsbildungsstufen kurz mit (1) äußere Sprache – innere Sprache, (2) materialisierte Handlung – innere Sprache, (3) materialisierte Handlung – äußere Sprache und (4) innere Sprache beschreiben lassen. Es zeigte sich, dass das Fehlen der äußeren Sprache unter (2) und (4) den Lernerfolg sehr stark beeinträchtigte. Manche Begriffe konnten allein aufgrund der äußeren und inneren Sprache erarbeitet werden, wenn sie sich auf handlungsgebundene und sprachlich erarbeitete Begriffe abstützen. So wurde der Begriff Winkelhalbierende allein nach Methode (1) und (4) aus den Begriffen Winkel und Gerade hergeleitet. "Während der Ausbildung der Begriffe GERADE und WINKEL eigneten sich die Versuchspersonen ein bestimmtes Handlungsverfahren an, das sie auf den neuen Begriff WINKELHALBIERENDE übertrugen. Die Handlung wurde in den meisten Fällen als innere Handlung vollzogen. Nur hin und wieder war eine Rückkehr zum Tun auf der Ebene der äußeren Sprache zu verzeichnen" (S. 125).

2.2.3 Sprachlich vermittelter Wissensaufbau

Solange und sofern mathematisches Wissen aus Handlungserfahrungen in konkreten Situationen bzw. auf der Grundlage von Visualisierungen gewonnen werden kann, kommen der sprachlichen Kommunikation die beschriebenen Funktionen der Aufmerksamkeitsfokussierung und des Anstoßes von Interpretationen, der Verifikation bzw. Kontrolle dieser Interpretationen und als Impuls zum Strukturieren der Modelle sowie zur abstrahierenden und generalisierenden Reflexion zu. Nun kann sich aber für einen nicht unbeträchtlichen Teil des mathematischen Wissens das Lernen nicht auf geeignete konkrete, ja nicht einmal zeichnerische Modelle stützen, weil solche gar nicht verfügbar sind. Man denke an Begriffe wie VARIABLE, TERM, TEILERMENGE, VIELFACHENMENGE, NÄHERUNGSWERT, WURZEL, VIERTE POTENZ, IRRATIONALE ZAHL oder auch an das Additionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

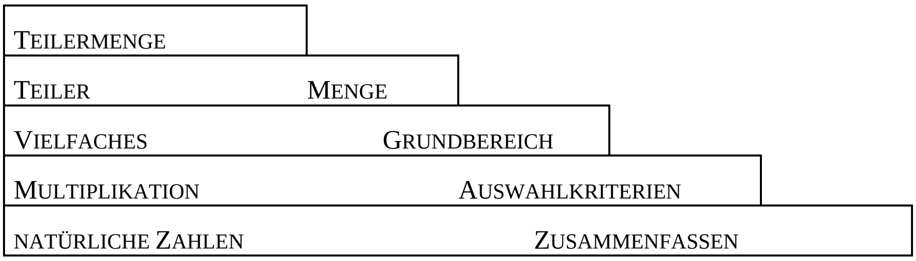
Zwar kann man lineare Gleichungen in zwei (oder mehr) Variablen als Funktionsgleichungen deuten und durch Geraden (oder Ebenen) in einem Koordinatensystem zeichnerisch darstellen. Es lässt sich auch zeigen, dass das Multiplizieren bzw. Dividieren von Gleichungen des Systems die ihnen entsprechenden Geraden nicht verändert, und dass einer aus Addition bzw. Subtraktion zweier (linear unabhängiger) Gleichungen hervorgehenden Gleichung eine Gerade entspricht, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht. Doch nimmt hier der Wissensaufbau nicht den Weg von den Geraden zu den Gleichungen, also vom Modell zur Sprache (zu den Symbolen). Die algebraischen Umformungen sind auch ohne die anschauliche Stütze leicht zu verstehen und deren Deutung als Operation mit Geraden (oder Ebenen) eher eine zusätzliche geometrische Interpretation. Am ehesten könnte man vom Geradenmodell her noch auf den Gedanken kommen, mittels der erwähnten Operationen Gleichungen zu 'erzeugen', deren zugehörige Geraden parallel zu den Achsen sind. Doch auch hier wären Schlüsse auf das Verfahren nur möglich, wenn bereits klar wäre, dass es sich dabei um Gleichungen handelt, aus denen eine der Variablen eliminiert ist.

In manchen Fällen stehen Visualisierungen deshalb nicht zur Verfügung, weil der mathematische Begriff die menschlichen Wahrnehmungsmöglichkeiten bzw. den physikalischen Wahrnehmungsraum letztlich überschreitet. Man denke an Begriffe wie EBENE oder GERADE, die man sich als räumlich unbegrenzt ('unendlich') und aus unendlich vielen Punkten bestehend zu denken hat; oder an Begriffe wie UNENDLICHE FOLGEN und REIHEN, das DICHTLIEGEN von Bruchzahlen im Unterschied zum KONTINUUM der reellen Zahlen, u. ä. Bei anderen Begriffen sind die Referenzobjekte selbst schon Ergebnisse einer begrifflichen Abstraktion, so dass zwei oder mehr Abstraktionsstufen nötig sind, um von (realen) Objekten zum Begriff zu gelangen. Will man ANZAHLEN als Klassen gleichmächtiger Mengen erfassen, geht der Weg von realen Objekten über Mengen zu Klassen von Mengen. Der Aufbau des Begriffes BRUCHZAHL (als Klasse wertgleicher Brüche) muss sich auf den Begriff Bruch stützen; und nur dieser kann auf Erfahrungen mit dem Teilen und Vervielfachen von (anschaulich dargestellten) Größen gegründet werden. Entsprechendes gilt für den Begriff FLÄCHENINHALT, aufgefasst als Klasse kongruenter, zerlegungs- oder ergänzungsgleicher Flächen.

Wo nun keine oder nur annähernd passende anschauliche Modelle zur Verfügung stehen, muss der Lehrer den Schülern durch sprachliche Darstellung von Begriffsbedeutungen und anderen Wissenselementen eine Grundlage für ihre Wissenskonstruktion geben. Der Sprache wächst dadurch, über die oben beschriebenen hinaus, eine weitere Funktion zu, nämlich die der verbalen Vermittlung begriffsrelevanter Erfahrungen. Der Terminus Vermittlung darf nicht so missverstanden werden, dass das Begriffswissen via Lehrersprache direkt an die Schüler übertragen werden könnte. Mag der Lehrer noch so treffend beschreiben, erklären, definieren; seine sprachliche Darstellung kann keine Gewähr bieten, dass seine Sprache Bedeutungen unzweideutig und gleichsam mit Erfolgsgarantie transportiert. Sie bleibt vielmehr ein offenes Angebot an Verstehensmöglichkeiten, das vom einzelnen Schüler im spezifischen Kontext subjektiv gedeutet wird, ein Impuls zu autonomer und individueller Wissenskonstruktion im Sinne einer konstruktivistischen Lerntheorie. Anderseits erlernt jeder Schüler mit dem Erwerb der fachlichen Sprache auch eine Fülle von Bedeutungen, welche die mathematische Kulturgemeinschaft in ihr aufbewahrt. Dies kann ihm nach und nach helfen, sprachliche Darstellungen im Sinne des Lehrers zu interpretieren; und die weitere Kommunikation wird ihm zeigen, welche seiner Deutungen sich bewähren, so dass er sein Wissen schrittweise den Vorstellungen des Lehrers oder des Lehrbuches anzupassen vermag.

Ohne Zweifel ist eine Wissenskonstruktion allein auf der Basis sprachlicher Mitteilung möglich, wobei dem Vorwissen eine bedeutende Rolle zukommt Die Schüler sind in der Lage, auch dann Vorstellungen von mathematischen Objekten aufzubauen und diese in fachliche Begriffe einzuordnen, wenn sie nie vorher Referenzobjekte oder Modelle für sie wahrgenommen haben. Sie können dabei vor allem den systemischen Aufbau mathematischer Begriffe nutzen, der in sprachlichen Benennungen und Beschreibungen seinen Ausdruck findet. Wer in Verbindung mit Dreiecken gelernt hat, was gleichschenkelig heißt, kann sich ein gleichschenkeliges Trapez vielleicht auch dann vorstellen, wenn er noch nie eine entsprechende Zeichnung gesehen hat. Wer Prismen oder Pyramiden mit drei-, vier- und fünfeckigen Grundflächen am Modell kennen gelernt hat, vermag auch die Vorstellung von Körpern mit sechseckigen Grundflächen in die Begriffe PRISMA und PYRAMIDE einzuordnen. Und wer mittels Bündelns und Tauschens ausreichende Bedeutungsvorstellungen zu zwei- oder dreistelligen (dekadischen) Zahlzeichen – und den zugehörigen Zahlennamen – aufgebaut hat, wird sich aus der Systematik der Wort- und Symbolbildung auch ‘einen Begriff machen’ können von mehrstelligen Zahlzeichen wie 3 758 oder 427 053 und zugehörigen Zahlennamen.

AEBLI (1981) zufolge wird der Begriffsaufbau durch sprachliche Vermittlung erleichtert, wenn diese einem gewissen Aufbau folgt. Ist doch eine sprachliche Mitteilung für den Lernenden nur dann verstehbar und verwertbar, wenn sie sich weitgehend bereits bekannter Begriffe bedient. AEBLI spricht von Begriffspyramiden. Beispielsweise kann der Begriff TEILERMENGE erklärt werden, wenn den Schülern bereits die Begriffe TEILER und MENGE vertraut sind. Man kann sagen: Fasst man alle Teiler einer Zahl zu einer Menge zusammen, so erhält man die Teilermenge dieser Zahl. Der Begriff TEILER ruht seinerseits wieder auf dem Begriff des VIELFACHEN und damit auf dem Multiplikationsbegriff. MENGE gründet sich auf der Vorstellung von Bereichen unterscheidbarer Objekte und geeigneter Auswahlkriterien.



Bei Begriffen der Schulmathematik lässt sich der Aufbau der Pyramide oft auf wenige Stufen beschränken, während sie bei komplexeren Fachbegriffen weit vielstufiger sein kann. In jedem Fall gilt aber nach AEBLI (1981): "Begriffshierarchien haben keine untere Grenze, genauer: diese verliert sich im Dunkel der frühen Lerngeschichte des Begriffsbildners, ..." (S. 107). Dennoch ist bei der sprachlichen Vermittlung von neuen Bedeutungen darauf zu achten, dass die Pyramide trägt, d. h. dass die meisten Bausteine bereits fester Besitz der Schüler sind, wenn der neue Begriff erklärt werden soll. Ein so erklärter Begriff kann dann selbst wieder ein Baustein im Aufbau einer anderen Begriffspyramide werden. Im Übrigen hält AEBLI das Bild von der Begriffspyramide nur für den Zeitraum des Lernens neuer Begriffe für angemessen. Sobald der Aufbau abgeschlossen ist, wird der neue Begriff einer unter anderen, der allerdings mit diesen netzartig verknüpft sein kann. Die Verknüpfung ist dabei besonders eng zu jenen Begriffen, die am Aufbau direkt oder indirekt beteiligt waren.

Falsch wäre nun auch AEBLI zufolge die Annahme, dass bei der sprachlichen Vermittlung von Begriffsbedeutungen nur der erklärende Lehrer aktiv und der einzelne Schüler in die passive Rolle des Aufnehmenden gedrängt sei. Es genügt nicht, dass die Ausgangselemente jeder Begriffsbildung im Wissen dessen, der Begriffe bildet, enthalten sind, damit sie zum neuen Begriff zusammengefügt werden können. "Der Angeleitete muss jeden Schritt der Konstruktion nachvollziehen, die Elemente aus seinem Wissen abrufen, sie in die rechte Beziehung setzen, sonst kommt es nicht zum Begriff" (S. 99). So gesehen ist letztlich auch in diesem Fall die Begriffsbildung "ganz und gar das Werk des Begriffsbildners" (ebd.). Der erklärende Lehrer kann eben nur Anstöße und Hilfen beim Abruf der Elemente des Begriffsaufbaus und zu ihrer richtigen Verknüpfung geben. Dies gelingt dadurch und insofern, als durch die Sprache die netzartige Verflechtung von Begriffen zum Ausdruck kommen und vom Schüler aufgenommen werden kann.

Schließlich müssen auch die Schüler selbst ihr wie immer aufgebautes begriffliches Wissen sprachlich darstellen. Für die mathematischen Objekte, Beziehungen, Operationen, Strukturen und Verfahren, die den Begriffen zugrunde liegen, stehen Bezeichnungen (Fachtermini) zur Verfügung, mit deren Hilfe sie sich benennen lassen. So können auch Schüler die Bedeutung einer angemessenen Terminologie und deren Verwendung nach fachsprachlichen Regeln und Normen einschätzen lernen.

Bezeichnungen können ein Wort, eine Wortgruppe oder ein fachliches Symbol sein. Ihre Bedeutung für die Begriffsbildung wurde in zahlreichen psychologischen Experimenten auch empirisch untersucht. PAIVIO (1986) kam zu der Feststellung, dass Bezeichnungen das Behalten von Konzepten vor allem dann erleichtern, wenn sie jederzeit verfügbar sind, wenn der Lernende Schwierigkeiten im Einprägen non-verbaler Informationen oder ein schwaches visuelles Gedächtnis hat, und wenn die Begriffsmodelle komplex sind. CAREY & GOSS (1957) zeigten, dass das Lernen von vertrauten Namen für Plättchen verschiedener Gestalt deren anschließendes Sortieren wesentlich erleichterte. DIETZ (1955) fand einen engen Zusammenhang zwischen der Unterschiedlichkeit von Bezeichnungen, die für Klassen sinnloser Figuren verwendet wurden und der Geschwindigkeit, mit der Versuchspersonen lernten, zwischen den Klassen wie auch zwischen den Modellen einzelner Klassen zu unterscheiden. (Bei ähnlich klingenden Namen war der Effekt wesentlich schwächer ausgeprägt und stiftete vor allem Verwirrung innerhalb der Klassen.)

Die sprachliche Darstellung des begrifflichen Wissens durch die Schüler mag zum einen als Grundlage der Wissenskonstruktion für andere Schüler dienen. In der Regel wird sie jedoch vom Lehrer zur Prüfung der Begriffskenntnisse eingesetzt. Dabei kann ein Schüler Wissen in der vom Lehrer vorgegebenen Darstellung unverändert wiedergeben (reproduzieren), aus Einzelelementen (wieder) zusammenfügen und in eigener Sprache formulieren (rekonstruieren), oder es im Zusammenhang neuer Situationen verwenden bzw. anwenden (transferieren). Damit erhält die Sprache im Unterricht schließlich die Funktion der Wissenskontrolle. Diese Funktion kann die Schülersprache um so besser erfüllen,

- je eigenständiger sie ist, d. h. je mehr sie sich dem Schüler eigener Sprachmittel bedient, und je weniger sie durch unverstanden übernommene Vorgaben des Lehrers gelenkt, geprägt und normiert ist, und
- je zusammenhängender sie ist, d. h. je mehr das Wissen explizit und ausführlich dargestellt, die sprachliche Darstellung, mindestens gedanklich, an einen Hörer oder Leser adressiert ist, der über das präsentierte Wissen selbst (noch) nicht verfügt.

2.3 Sprache und mathematisches Problemlösen

Im Abschnitt 2.1.3 wurde die Förderung mathematischer Fähigkeiten, neben dem Aufbau von Wissen von Begriffen, Sätzen und Verfahren als wichtiger Zielbereich für das Mathematiklernen vorgestellt und deutlich gemacht, dass die dazu erforderlichen Tätigkeiten im Unterricht im Allgemeinen durch Aufgaben mit Problemcharakter und deren Lösung angestoßen bzw. in Gang gehalten werden. Es soll nun die Rolle und die Funktion der Sprache beim Lösen solcher Probleme untersucht werden. Als Grundlage dafür gilt es, zuerst die mit dem Problemlösen verbundenen Prozesse selbst zu analysieren.

2.3.1 Problemlösen als mathematische Tätigkeit

Im Wesentlichen eine Form des schöpferischen Denkens, ist das Problemlösen schwer in allgemeingültige Kategorien zu fassen. Dennoch ist seine Beschreibung immer wieder in verschiedener Weise versucht worden.

a) Stufen des Problemlöseprozesses

Viele Forscher gehen davon aus, dass der Prozess der Problemlösung einer bestimmten zeitlichen Ordnung folgt. Sie versuchen daher, für seinen Ablauf idealtypische Stufenfolgen anzugeben, die durch Selbstbeobachtung gewonnen oder aufgrund theoretischer Analyse entwickelt wurden. Nachfolgend sind drei Beispiele solcher, vor allem mit Blick auf das Lösen mathematischer Probleme entworfene Stufenmodelle in einer Übersicht zusammengestellt.

POINCARÉ (1914)	DEWEY (1951)	POLYA (1967[2])
1. Vorbereitungsphase	1. Begegnung mit der Schwierigkeit	1. Verstehen der Aufgabe
2. Lokalisierung, Präzisierung und Definition des Problems	2. Inkubationsphase	
3. Entwicklung möglicher Lösungen	3. Illumination (Erleuchtung)	2. Ausdenken eines Plans
4. Verifizierungsphase	4. Logische Ausarbeitung eines Plans	3. Ausführung des Lösungsansatzes
5. Annahme / Ablehnung der Lösungsidee		4. Rückschau

Die Übersicht lässt Gemeinsamkeiten zwischen den Ablaufmodellen deutlich werden, die eine Zusammenfassung zu drei Stufen sinnvoll erscheinen lassen:

– Stufe I ist durch die Wahrnehmung und Erfassung des Problems sowie durch intensive und bewusste Auseinandersetzung mit diesem gekennzeichnet ist. Sie sollte mit einem Verständnis des Problems abschließen, das vor allem Klarheit über folgende Fragen bringt: Was ist gegeben? Was ist unbekannt? Wie lauten die Bedingungen? Sind diese ausreichend, unzureichend, oder ist die Aufgabe überbestimmt?
– Auf der Stufe II werden Lösungsvermutungen angestellt, Lösungspläne entworfen und gedanklich erprobt. Dabei hält der Problemlöser Ausschau nach verwendbarem Wissen, nach Erfahrungen aus früher gelösten Problemen (mit ähnlichen Bedingungen und Unbekannten; analogen, allgemeineren oder spezielleren), oder er versucht, durch systematische Veränderung der Bedingungen, Vorgaben und Lösungsziele einen geplanten Umweg über verwandte, leichter lösbare Aufgaben zu finden.
– Sobald sich eine als geeignet erscheinende Lösungsidee herauskristallisiert hat, wird diese auf Stufe III realisiert und auf ihre Eignung hin geprüft. Stellt sie sich als nicht durchführbar oder erfolgreich heraus, muss sie verworfen werden, und der Prozess kehrt zu Stufe II, eventuell sogar zur Stufe I zurück. Ansonsten kann das Ergebnis in geeigneter Weise dargestellt und die Lösung nochmals reflektiert werden. Die Lösungsidee geht in den Erfahrungsschatz für das Lösen weiterer Probleme ein.

b) Problemlöse-Aktivitäten

Wenngleich für erfolgreiches Problemlösen alle drei beschriebenen Stufen wichtig sind, so ist doch Stufe II der bedeutsamste Schritt. Hier ereignen sich die für das Finden einer Lösung entscheidenden Denkprozesse; hier zeigt sich das Problemlösen als eine Form des mathematischen Denkens, die jene Fähigkeiten einsetzt und entwickelt, die oben als Prozessziele vorgestellt wurden.

Es ist keineswegs so, dass sich das mathematische Denken auf ‘logisches Denken’ im Sinne eines systematischen Ordnens von Begriffen, Eigenschaften und Sätzen (lokales und globales Ordnen), des Schließens nach Regeln der formalen Logik bzw. des deduktiven Herleitens von Sätzen beschränken kann. Dieses steht zwar manchmal, vor allem beim Lösen von Beweisproblemen, im Mittelpunkt. Doch reicht es schon hier für das Auffinden von Beweisideen zumeist nicht aus. Bei vielen anderen Problemen führt dieses sog. konvergente Denken von vorne herein nicht zum Erfolg; denn das Entdecken von Lösungsschritten und das Planen von Lösungswegen vollzieht sich oft gerade nicht nach Art eines linearen Pfads formallogischer Schritte. Entscheidend ist vielmehr, dass der Problemkern erfasst, Lücken aufgespürt und Unstimmigkeiten registriert, dass verschiedene Lösungsmöglichkeiten erdacht, probierend durchgespielt und bewertet werden. Verlangt wird sog. divergentes, kreatives Denken.

Bedeutende Mathematiker haben zu zeigen versucht, wie kreatives Denken im Bereich der mathematischen Forschung und Theoriebildung funktioniert (siehe POINCARÉ 1914, HADAMARD 1954; VAN DER WAERDEN 1954a). Ihre Ausführungen lassen sich jedoch nur unter Vorbehalt auf schulisches Problemlösen anwenden. POLYA (1967[2]) hingegen hat sich vor allem mit Mitteln, Methoden und Maßnahmen zur Förderung des produktiven, problemlösenden Denkens bei "Normalbegabten" beschäftigt. Als Hauptvertreter der mathematischen Heuristik beschreibt er wichtige Aktivitäten, die einem Problemlöser beim Auffinden der Lösung helfen können. Er vertritt auch die Meinung, dass diese heuristischen Aktivitäten erlernt und gelehrt werden können. Seine Überlegungen dienen als wichtige Quelle für die folgende Aufstellung von Problemlöse-Aktivitäten.

- Eine grundlegende heuristische Aktivität ist das Experimentieren, d. h. ein bezüglich der verwendeten Hilfsmittel und hinsichtlich seines Ausgangs offenes Bearbeiten mathematischer Fragestellungen, indem man bewusst verschiedene Situationen herbeiführt, Bedingungen systematisch abändert, Hypothesen bildet und prüft.
- Unter Umstrukturieren versteht man einen Denkprozess, bei dem eine gegebene in eine nach anderen Gesichtspunkten geordnete Aufgabenstruktur übergeführt wird. Der erste Schritt eines Umstrukturierungsprozesses besteht im "Aufbrechen" der Ausgangsstruktur. Er erfordert vom Problemlösenden die Bereitschaft, fixe Denkmuster aufzugeben, um ein und dieselbe Sache unter möglichst vielen verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten. Danach wird nach versteckten Informationen und nach einem "Schlüssel" zum Aufbau der neuen Struktur gesucht. Beispiele – auch mathematikspezifische – für Problemlösung durch Umstrukturieren sind bei DUNCKER (1966), WERTHEIMER (1964), OERTER (1971), ELLROTH & SCHINDLER (1975) beschrieben.
- Das dem logischen Schließen vorausgehende Suchen nach geeigneten Prämissen, Argumenten und Konklusionen bezeichnet POLYA als "plausibles Schließen". Zu den wichtigsten Arten plausiblen Schließens gehört das Schließen aufgrund von Analogien, das induktive Schließen, das anschauliche Schließen, das Schließen durch Untersuchen von Grenzfällen, das Schließen durch Stetigkeitsbetrachtungen (siehe POLYA 1967[2] und BALK 1971).
- Eine zentrale Stellung für das Erklären der Denkvorgänge beim Problemlösen nimmt schließlich der Strategiebegriff ein. Mit ihm beschreibt man global angesetzte Pläne, mit deren Hilfe aus einzelnen Bausteinen das Gesamtlösungsschema eines Problems zusammengesetzt wird. "Denkstrategien sind Verhaltenspläne während des Problemlösevorgangs" (OERTER 1971, S. 244). Beim Entwickeln von Strategien kann man von den gegebenen Daten aus zum Ziel fortschreiten (progressives Planen) oder von einem faktisch gegebenen oder hypothetisch angenommenen Ziel zu den Vorgaben und Voraussetzungen zurückgehen, in der Absicht, durch Umkehren der einzelnen Gedankenschritte wieder zum Ziel zu gelangen (regressives Planen bzw. reversibles Vorgehen).

Nachfolgend soll nun die Rolle und Funktion der Sprache getrennt für die drei genannten Stufen des Problemlöseprozesses untersucht werden: Problemerfassung (2.3.2), Problemlösung (2.3.3) und Lösungsdarstellung (2.3.4).

2.3.2 Sprache und Problemerfassung

Bezüglich der Problemerfassung ist daran zu denken, dass ein Großteil der Daten, Bedingungen und Fragestellungen, die dem Schüler mit dem Auftrag zur Problemlösung vorgelegt werden, in schriftlicher Form, als Text - nachfolgend ‘Aufgabentext’ genannt - gegeben ist, wobei die Formulierung in der Regel, zumindest teilweise, fachsprachliche Züge aufweist. Damit ergeben sich hinsichtlich des Zusammenhangs von Sprache und Problemerfassung drei Fragestellungen:

– Welchen Einfluss hat die Gestalt des Textes auf die Problemerfassung?
– Wie wirkt sich die Lesefähigkeit des Problemlösenden auf diese aus?
– Was bedeutet Textverstehen für die Problemerfassung?

a) 'Lesbarkeit' von Aufgabentexten

Nach JOHNSON (1967) bestimmt die verbale Formulierung eines Problems die Richtung, in der Versuchspersonen dieses in Angriff nehmen. Sie kann den Überblick über die Situation, die Identifikation ihrer Elemente und die Feststellung des Problemcharakters bewirken und den eigentlichen ProblemlöseProzess selbst einleiten. Damit dies gelingt, müssen Lehrer und Verfasser von Schulbüchern bei der Formulierung bzw. Auswahl der Texte auf deren angemessene Gestaltung achten.

Die Frage, in welcher Weise Art und Gestaltung eines Textes die Erfassung seines Sinngehalts durch potentielle Leser beeinflusst, wird unter dem Stichwort der 'Lesbarkeit' untersucht. Diesbezügliche Befunde aus der allgemeinen Lesbarkeitsforschung und speziell zur Lesbarkeit mathematischer Lehrbuch- und Erklärungstexte werden im Anhang "Lesbarkeit von Texten - Lesefähigkeit - Textverstehen" referiert. Sie haben wohl auch für Aufgabentexte Gültigkeit. Das betrifft insbesondere Gesichtspunkte wie

– Die grammatikalisch-stilistische Gestalt des Aufgabentextes. Als günstig werden hier eingeschätzt: kurze Satzteile, Verwendung des Aktivs, d. h. Vermeidung von Passivkonstruktionen, keine zu starke Nominalisierung und keine Satzschachtelung;
– die semantische Dichte des Aufgabentextes. Vermieden werden sollten hier gleichermaßen zu große Weitschweifigkeit (synonyme oder wörtliche Wiederholung von Satzgliedern mit wichtiger Bedeutung) wie allzu große Prägnanz, also Verzicht auf jegliche Redundanz;
– der Anteil an schwierigen Fachwörtern und mathematischer Symbolisierung im Aufgabentext; aber auch
– die graphische (redaktionelle) Gestaltung des Textes.

  Leider gibt es nur wenige Untersuchungen zur Lesbarkeit speziell von Aufgabentexten. *Linville* interessierte sich dafür, wie sehr Syntax oder Vokabular zur Schwierigkeit von Textaufgaben beitragen. Das Ergebnis lässt vermuten, dass sowohl die Syntax wie auch das Vokabular die Schwierigkeit arithmetischer Textaufgaben bestimmen, wobei dem Letzeren mehr Bedeutung zukommt (zitiert nach NEWMAN 1983).

PELED & WITTROCK (1990) *entwickeln* ein Modell zur Vorhersage des Schwierigkeitsgrads von sachbezogenen Textaufgaben. Zu diesem Zweck unterscheiden sie im Aufgabentext zwischen Argumenten (das sind Objekte, Zahlen, Größen usw.) und Prädikaten (das sind Aussagen über diese Objekte). Falls Argumente auf ein Prädikat bezogen sind oder umgekehrt, heißen sie verknüpfte Argumente bzw. Prädikate. Man betrachte z. B. die Aufgabe „Nach einem Einkauf für 127 Schilling blieb David nur noch ein Teil seiner Ersparnisse von 589 Schilling. Wie groß war dieser Teil?" Sie hätte folgende Grobstuktur:

Argument 1	**Prädikat**	**Argument 2**
Nach einem *Einkauf* für *127 Schilling*	*blieb David*	nur noch *ein Teil* seiner Ersparnisse von *589 Schilling*

Betrachtet man die Feinstruktur, so verknüpft Argument 1 das Prädikat *Einkauf* mit dem Argument *127 Schilling*, das Prädikat verbindet das Prädikat *blieb* mit dem Argument *David,* und Argument 2 verbindet das Prädikat *ein Teil*, das Argument *589 Schilling* und den 'Modifikator' *seiner Ersparnisse*, der selbst wieder aus dem Argument *seiner* und dem Prädikat *Ersparnisse* besteht.

Mit Hilfe dieser Begriffe charakterisieren die Autoren Textaufgaben nach Komplexität und Kohärenz. Die Komplexität beschreiben sie unter zwei Gesichtspunkten: der Verknüpfungsprozedur, die eine einfache oder eine doppelte sein kann - im Beispiel ist jede Zahl in den Argumenten mit der Benennung Schilling verknüpft, daher ist die Verknüpfungsstruktur eine einfache - und die Richtungsgleichheit oder -verschiedenheit der Prädikate. Diese können z. B. gleiche oder entgegengesetzte Operationen verlangen. Die Kohärenz einer Textaufgabe wird auf einer dreistufigen Skala eingeschätzt, und zwar differenziert nach drei Gesichtspunkten: Kohärenz der qualitativen Argumente, der quantitativen Argumente und der Prädikate. Die Schwierigkeit einer Textaufgabe für eine Population von Schülern wird dann mittels der Kombination der beiden Komplexitätsgesichtspunkte und der drei Kohärenzgesichtspunkte definiert. Dieses recht komplexe Modell erfasst nach Meinung der Autoren alle Faktoren, die in der bisherigen Forschung als bedeutsam für die Lösbarkeit von Textaufgaben durch Schüler herausgefunden wurden.

Auch NEYRET (1991) beschäftigt sich mit dem Verstehen unterschiedlicher Aufgabentexte durch Schüler. Er analysiert die Texte nach Themen bzw. Handlungen, die in ihnen auftreten, und die Art ihrer Abfolge. Einen mittleren Schwierigkeitsgrad repräsentieren dabei Aufgaben, in denen mehrere Themen im Aufgabentext in linearer Abfolge entwickelt werden. Beispiel: „Ein Blumenhändler kommt von der Großmarkthalle zurück (Thema 1), wo er sechs Bünde zu je 25 Rosen gekauft hat (Thema 2). Er verkauft die Rosen stückweise zu je 15 Francs (Thema 3).“ In diesem Fall wird jeweils das Objekt eines Themas zum Gegenstand des folgenden Themas, so dass sich insgesamt eine Struktur des linearen Fortschreitens ergibt. Einer niedrigeren Schwierigkeitsstufe gehören dann Aufgaben an, bei denen das Thema konstant bleibt. Beispiel: Damian geht in verschiedene Klassen um zu erheben, wie viele Schüler heute zum Mittagessen in die Kantine gehen wollen. Er notiert auf seinem Blatt: 1. Klasse – 4 Schüler, 2. Klasse – 12 Schüler, 3. Klasse – 9 Schüler, 4. Klasse – 10 Schüler und 5. Klasse – 11 Schüler. Hier wird das gleiche Thema nacheinander an verschiedene Objekte gebunden. Einer höheren Schwierigkeitsstufe gehören hingegen Aufgaben mit einem gespaltenen thematischen Fortschritt an. Beispiel: „Paul und sein Papa begeben sich in die Reparaturwerkstätte um die vier Reifen ihres Wagens wechseln zu lassen. Jeder Reifen kostet 285 Francs. Paul rechnet schnell aus, wie teuer die Reifen kommen werden. Aber Pauls Papa ist nicht zufrieden, denn er findet die Summe zu hoch. Daraufhin schlägt ihm der Monteur lächelnd folgendes vor: Einverstanden, ich schenke ihnen die Reifen, aber an jedem Rad gibt es vier Schrauben. Für die erste Schraube die ich ersetze geben sie mir einen Francs, für die zweite zwei Francs, für die dritte vier Francs und so verdoppelt sich der Preis für jede folgende Schraube. Paul und sein Vater denken nach und lehnen schließlich den Vorschlag lachend ab.“

NESHER & TEUBAL (1975), die in zwei Experimenten den Einfluss bestimmter Schlüsselwörter in Textaufgaben auf das Lösungsverhalten der Schüler untersuchten, konnten zeigen, dass die Wahl der richtigen mathematischen Operatoren signifikant (im Fall der Subtraktion sogar hochsignifikant) vom Vorkommen von Wörtern abhängt, die diese Wahl nahelegen (‘verbal cues’). Mit großem Abstand wurden jene Aufgaben am besten gelöst, bei denen jeweils das entscheidende Schlüsselwort eine der verlangten Operation entsprechende Konnotation hatte, wie z. B. in der Aufgabe „Maria hat 5 Kugeln und gewinnt 3 hinzu; wie viele hat sie nun?“ im Gegensatz zu der Aufgabe „Maria hat 5 Kugeln; wie viele hat sie dazugewonnen, wenn sie anschließend 8 hat?“ *Gewinnen* hat die Konnotation der Addition als entsprechender mathematischer Operation; die zweite Aufgabe verlangt aber eine Subtraktion.

Wenn in zahlreichen Untersuchungen immer wieder nachgewiesen werden konnte, dass das Beiziehen von zeichnerischen Lösungshilfen den Bearbeitungserfolg bei Textaufgaben deutlich zu steigern vermag (siehe z. B. NOLL 1983), so könnte das seinen Grund darin haben, dass Zeichnungen nicht nur Größen, sondern auch Größenbeziehungen verdeutlichen, oder dass ihre Einstellung zumindest die Auseinandersetzung mit den Beziehungen anregt.

MÖLLER (1994) interessiert sich dafür, wie Schüler Handlungsaufforderungen in elementaren arithmetischen und algebraischen Aufgaben verstehen. Dabei unterscheidet sie zwischen ausgesprochen fachsprachlichen Aufforderungen wie „Addiere!“, „Dividiere!“, „Quadriere!“ oder „Ziehe die Wurzel!“, eher umgangssprachlichen Aufforderungen wie „Kürze!“, „Vereinfache!“, „Fasse zusammen!“, „Klammere aus!“ „Lege eine Wertetabelle an!“ und Mischformen zwischen beiden, z. B. „Schreibe mittels positiver Exponenten!“, „Löse mittels quadratischer Ergänzung!“, „Zeichne den Graph der Funktion!“. Schüler einer 9. Gymnasialklasse sollten im ersten Teil eines Tests zu vier typischen Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der Algebra die passenden Aufforderungen angeben und im zweiten Teil zu entsprechenden Aufgaben die Bedeutung gegebener Aufforderungen vor der Bearbeitung erklären. Es zeigte sich, dass formal gestellte Aufgaben der Termumformungen und des Lösens quadratischer Gleichungen offenbar keiner expliziten Anweisung bedürfen, also selbst genügend Signalwirkung haben. Dies ist anders im Fall von Ungleichungen und linearen Gleichungssystemen. Bei solchen Aufgaben, deren Lösungsverfahren den Schülern nicht unmittelbar präsent sind, versuchen sie vermutlich aus einer Aufforderung Hinweise auf dieses zu ziehen. Zum anderen wurde deutlich, dass die Schüler mit einer Reihe herkömmlicher Aufforderungen ungenaue oder unzulängliche Bedeutungsvorstellungen verbinden. Sie verwechselten beispielsweise *ausklammern* mit *Klammern auflösen* oder verwendeten das Wort *kürzen* im umgangssprachlichen Sinn als ‘kürzer machen’. Ihr Einfallsreichtum an angemessenen Aufforderungen hält sich sehr in Grenzen; zumeist schreiben sie wiederholt nur „Berechne!“, „Rechne aus!“ oder „Berechne das Ergebnis!“. Bei den Termumformungen kommen allerdings auch „Klammern auflösen“, „ausklammern“ und „vereinfachen“ vor.

b) Lesefähigkeit und Problemerfassung

Ob es einem Schüler gelingt, das in einem Text dargestellte Problem in seinen wesentlichen Aspekten zu erfassen, hängt natürlich nicht nur von der Gestaltung des Textes ab. Es wird auf Seiten des Lesers auch eine gewisse Kompetenz im sinnentnehmenden Lesen verlangt. Aus diesem Grund wird vor der Beschäftigung mit dem Textverstehen die Lesefähigkeit des Lernenden ins Auge gefasst. Bezüglich allgemeiner Befunde zur Lesefähigkeit sei auf den Anhang “Lesbarkeit von Texten - Lesefähigkeit - Textverstehen“ verwiesen, wo man sich über deren Voraussetzungen und Merkmale auch hinsichtlich mathematischer Fachtexte informieren kann.

Was das Lesen von Aufgabentexten angeht, nennt NEWMAN (1983) bei der Beschreibung von Erfolgsstrategien für das Lösen von sachbezogenen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule als erstes die Worterkennung: „The first performance strategy a pupil must use when attempting to answer a mathematical item is reading recognition. Essential words, numerals and symbols in the item must be recognised“ (S. 26). Die zweite für das Problemlösen bedeutsame Strategie verlangt vom Schüler Verstehen. „The pupil must, (1) interpret the meaning of specific terms in the text, and (2) comprehend general meaning or the main idea of the item.“ – „When attaching the appropriate meaning to a term the pupil has to be aware of the multiple meanings of terms and of the multiple terms for concepts; he may have to cope with interpreting three or four different terms for the one concept“ (S. 26).

NEWMAN (1983) referiert auch eine Reihe von Untersuchungen, die sich mit dem Zusammenhang zwischen der Lesefähigkeit einerseits und dem Problemlösen, aber auch generell mit dem Erfolg von Schülern im Mathematiklernen andererseits beschäftigen. Einige sollen hier kurz wiedergegeben werden.

Balof versuchte herauszufinden, in welchem Maß allgemeine Lesefähigkeit und Rechenfähigkeit mit Problemlösefähigkeit verbunden sind, und ob hohes Niveau in einer dieser beiden Variablen ein niederes Niveau in der anderen kompensieren könnte. In der Tat fand er eine deutliche Auswirkung der allgemeinen Lesefähigkeit auf die Problemlösefähigkeit. Allerdings schienen seine Resultate darauf hinzudeuten, dass die Beziehung zwischen Rechenfähigkeit und Problemlösefähigkeit eher enger ist als die zwischen allgemeiner Lesefähigkeit und Problemlösefähigkeit.

Muscio unterzog Schüler mit einem hohen Maß an „quantitativem Verständnis“ eingehenden Studien; dabei subsumiert er unter *quantitativem Verständnis* „meaningful conceptions of quantity, our number system, and our system of measurement ... (plus) an understanding of the rationale of our number processes and a grasp of a meaningful mathematical vocabulary“ (zit. nach NEWMAN 1983, S. 40). Wenn die allgemeine Intelligenz als Variable herausgefiltert wurde, blieb eine signifikante Beziehung zwischen dem quantitativen Verständnis und allgemeiner Lesefähigkeit sowie auch zwischen quantitativem Verständnis und Rechnen, Schlussfolgern und mathematischem Vokabular.

Chase kam bei seinen Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass nur drei unabhängige Variablen direkt mit Problemlösen verknüpft sind. Diese Variablen sind Rechenfähigkeit, Fähigkeit zur Detailerkenntnis beim Lesen und grundlegende arithmetische Kenntnisse (z. B. über Zahlen und Zahlbeziehungen). Damit erwies sich die Teilleistung des Lesens als signifikant mit Problemlösefähigkeit verbunden.

Treacy beschränkte sich von vorne herein nicht auf die Betrachtung einer allgemeinen Lesefähigkeit, sondern zog eine Reihe von Teilfähigkeiten in Betracht, die mit dem Lesen zusammenhängen: Umfang des Verstehens, kontextspezifisches Vokabular, isolierte Wörter, arithmetisches Vokabular und Interpretation des Inhalts. Er fand heraus, dass, bezogen auf entwicklungsmäßig vergleichbare Gruppen, hoher Erfolg im Mathematiklernen verbunden ist mit einer Reihe von sprachlichen Teilfähigkeiten, insbesondere über quantitative Beziehungen, kontextspezifisches Vokabular, isolierte Wörter und arithmetisches Vokabular.

Hingegen fand *Eagle*, dass das allgemeine Lesevokabular geringeren Einfluss auf den Erfolg im Fach Mathematik nimmt als jeder andere von ihm betrachtete Faktor mit Ausnahme der Lesegeschwindigkeit. Jedoch legten seine Ergebnisse einen hohen Einfluss des mathematischen Vokabulars auf den mathematischen Lernerfolg nahe.

Nach diesen und anderen Untersuchungen wurde zunehmend deutlich, dass Lesefähigkeit nicht global betrachtet werden darf, sondern aus einer größeren Zahl von Teilfähigkeiten besteht, die Einfluss auf den Erfolg im Lösen arithmetischer Probleme nehmen können. Außerdem müsste bei solchen Untersuchungen auch die Qualität der Lesefähigkeit in Betracht gezogen werden. Sinnentnehmendes Lesen kann vermutlich nicht ein passiver Prozess linear verlaufender Informationsaufnahme sein, sondern muss einem aktiven kognitiven Handeln gleichen, das sprachliche Wahrnehmungen strukturiert und dabei zuordnende, ordnende, hierarchische und operative Beziehungen aufdeckt. Es gilt, die Bedeutung der in der Problemstellung verwendeten Begriffe, Beziehungen und Operationen zu verstehen.

c) Textverstehen und Problemerfassung

Ob den Schülern bei mathematischen Problemen Erfolg versprechende Lösungsversuche gelingen, hängt offenbar auch mit ihrer Fähigkeit zusammen, den im Aufgabentext dargestellten Sachverhalt inhaltlich zu verstehen. Dies wiederum hat mit der Beziehung zwischen der Art der Sache und den diesbezüglichen Vorkenntnissen der Schüler zu tun.

NESHER & GREENO & RILEY (1982) untersuchen den Lösungserfolg von Grundschülern bei eingekleideten Additions- und Subtraktionsaufgaben. Dabei klassifizieren sie die Aufgaben nach 14 Kategorien. Liegt der Einkleidung die Vorstellung von der Vereinigung disjunkter Mengen zugrunde (<u>Verknüpfungsaufgaben</u>), so kann nach der Anzahl der Vereinigungsmenge oder nach der Anzahl der einen der beiden Teilmengen gefragt sein. Verweist die Einkleidung auf die Vorstellung von einer Veränderung einer Ausgangsmenge (<u>funktionale Aufgaben</u>), so kann gesucht sein: die Zielzahl, die Veränderung und die Ausgangszahl, und das jeweils im Fall zunehmender oder abnehmender Größe der Zahlen. Schließlich kann der Aufgabeneinkleidung die Vorstellung eines Vergleichs zugrunde liegen (<u>komparative Aufgaben</u>) und dabei nach dem Unterschied, dem Verglichenen oder dem zu Vergleichenden gefragt sein; dabei kann jeweils an ein „Mehr“ oder ein „Weniger“ gedacht sein.

Der Lösungserfolg bei Schülern zeigte gravierende Unterschiede im Verstehen dieser Problemkategorien an. Besonders erfolgreich gelöst wurden Verknüpfungsaufgaben, bei denen die Anzahl der Vereinigungsmenge gesucht war, sowie funktionale Aufgaben, bei denen die Zielzahl gefunden werden sollte, und zwar gleichermaßen bei zunehmendem und abnehmendem Wert. Besonders viele Misserfolge stellten sich ein bei

- Verknüpfungsaufgaben, bei denen die Anzahl einer der beiden Teilmengen gesucht war,
- funktionalen Aufgaben, bei denen nach der Ausgangszahl gefragt war, unabhängig davon, ob es sich um eine Zu- oder eine Abnahme handelte,
- komparative Aufgaben mit Ausnahme derer, bei denen nach dem Unterschied gefragt war.

  Insgesamt scheinen funktionale Aufgaben etwas besser gelöst zu werden als Verknüpfungsaufgaben. Komparative Aufgaben fallen dem gegenüber deutlich ab.

Um für die Befunde eine Erklärungshypothese zu entwickeln, achteten die Autoren auf die Beziehung zwischen zwei Wissensbereichen im Aufgabentext: dem der realen Objekte, Ereignisse und Beziehungen, die in der Umgangssprache beschrieben werden, und dem der Zahlen, Zahloperationen und Zahlbeziehungen, die mit Hilfe spezieller Symbole mit arithmetischer Sprache darzustellen sind. Es zeigte sich, dass für die erfolgreich bearbeiteten Aufgaben die Fähigkeit ausreichte, einzelne Mengen in beiden Sprachen darzustellen und mit ihnen zu operieren. Komparative Aufgaben, die nach dem Unterschied fragen, ließen sich lösen, wenn es gelang, eine Veränderung in der Ausgangsmenge mit einer Handlung kausal in Beziehung zu setzen und zudem die Handlungsrichtung zu bestimmen. Kam dazu noch eine gute Zählfähigkeit, wurden auch funktionale Aufgaben bewältigt, bei denen nach der Veränderung gefragt war. Dabei musste das Zeichen „+“ mit „nimm mehr“ und das Zeichen „–“ mit „nimm weg“ übersetzt werden. Wenn schließlich die Kinder auch über ein „Teil-Teil-Ganzes-Schema“ verfügten und additive Beziehungen zwischen gegebenen Zahlen erkannten, so befähigte sie dies zu reversiblen Folgerungen über Mengenbeziehungen, einschließlich der Größe der Differenz zwischen zwei gegebenen Mengen. Damit konnten Vereinigungsaufgaben, bei denen die Anzahl einer der Teilmengen gesucht war, sowie funktionale Aufgaben mit gesuchter Ausgangszahl bewältigt werden. Schließlich musste das Kind fähig sein, die Zuordnung zwischen den beiden Bereichen nicht nur auf der Basis isolierter Reizwörter vorzunehmen, sondern auf der Basis des Verstehens der den Sprachen zugrunde liegenden Semantiken. Dann konnte es auch die komparativen Aufgaben, die nach dem Verglichenen fragten, bewältigen, weil es aufgrund einer gegebenen Information jede Anzahl bilden konnte, die zur Vervollständigung des Teil-Teil-Ganzes-Schemas benötigt wird. Als die schwierigsten erwiesen sich komparative Aufgaben, die nach dem zu Vergleichenden suchten. Hier musste ein Schema nicht-symmetrischer Beziehungen in reversibler Weise verfügbar sein. Es galt zu erkennen, dass die umgangssprachliche Beschreibung gerichtet und geordnet, aber nicht symmetrisch ist. Dann gelang es, durch Übergang zu einer entgegen gesetzten Oberflächenstruktur in der arithmetischen Sprache die beiden Bereiche in verlangter Weise zuzuordnen. Der Schüler konnte im Text „mehr“ lesen und dennoch eine Subtraktion ansetzen.

In einer unveröffentlichten Studie untersuchte *Maier* das Verstehen mathematischer Aufgabentexte durch Schüler. 26 Schüler einer 9. Jahrgangsstufe erhielten im Rahmen von Einzelinterviews Textaufgaben zur Prozentrechnung vorgelegt. Nach lautem Vorlesen und anschließender nochmaliger stiller Lektüre sollten sie den Inhalt des Textes zunächst frei ‘nacherzählen’. Dann wurden sie gebeten, im geschriebenen Text jene Wörter zu unterstreichen, die ihrer Meinung nach für die Lösung besonders wichtig sind, und dies nach Möglichkeit auch begründen. Des Weiteren gab der Versuchsleiter nacheinander zuerst die Sachbegriffe, die Größen und die umgangssprachlichen Wörter, die auf Rechenoperationen hinweisen, einzeln vor und bat die Versuchsperson um

Erläuterung dieser Begriffe. Dabei entwickelte sich zumeist ein recht lebhaftes Gespräch, das weitere Nachfragen zum Verständnis ermöglichte. Zuletzt sollte der Schüler noch sagen, welche Rechenoperationen auszuführen seien, und Lösungsansätze versuchen. Dies gab neue Anlässe für ein Gespräch, diesmal über die Beziehung zwischen den gegebenen Größen. Die Ergebnisse lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

– Den Schülern gelang es im Allgemeinen sehr gut, im Aufgabentext Wichtiges von Unwichtigem zu unterscheiden.
– Die Sachbegriffe wurden weithin korrekt erfasst. Dies gilt speziell für kaufmännische Begriffe wie SELBSTKOSTENPREIS, GEWINN und VERLUST. (SELBSTKOSTENPREIS wurde z. B. erklärt als Geld, das der Großmarkt für die Lieferung zu zahlen hat, GEWINN als „Geld zu seinen Gunsten“ oder „das er einsteckt“, VERLUST als das, „was er darauf bezahlt“ oder „was er verliert“ oder als „Minussache“) Physikalische Begriffe wie ENTFERNUNG und GESCHWINDIGKEIT bereiteten kaum Schwierigkeiten, hingegen aber geometrische Fachbezeichnungen wie UMFANG oder DURCHMESSER.
– Unter den Größen konnten die Versuchspersonen Preisangaben, Längenangabe und Zeitangaben richtig deuten und auch sachlich richtig zuordnen. Prozentsätze erklärten bei entsprechenden Aufgaben nur 60 % der Schüler richtig. Bei den Bruchzahlen traten Unterschiede je nach Art der auftretenden Brüche zutage. Während die Bruchzahl 1/3 von nahezu allen Schülern erklärt werden konnte, gelang dies für den Bruch 4/7 nur etwa der Hälfte der Schüler. Die übrigen hatten unvollständige Vorstellungen oder erfassten den Bruch überhaupt nicht.
– Gravierende Ausfälle zeigten sich beim Verständnis der Verbaloperatoren und der Beziehungen zwischen den Größen. Ein so geläufiger Operator wie REST konnte nur von wenigen Schülern erläutert werden. Bei den Beziehungen gelang zwar noch die Zuordnung von Größen und Sachbegriffen gemäß Aufgabentext. Sobald es jedoch um Beziehungen der Größen untereinander ging, wurde nicht eine einzige von mehr als der Hälfte der Schüler verstanden. Bei manchen Aufgaben wiesen einige Beziehungen Ausfälle von 90 % auf. Bei einer der Aufgaben wurden drei Beziehungen überhaupt nur von einem einzigen Schüler erfasst.

So scheint es nur konsequent, wenn RICHARD & ESCARABAJAL (1983) aufgrund empirischer Arbeiten, zu dem Schluss gelangen, dass im Prozess des Problemlösens zwei Arten von Kenntnissen von herausragender Bedeutung sind, nämlich Beziehungskenntnisse, d. h. Kenntnisse über Dinge und Beziehungen zwischen ihnen, und Verfahrenskenntnisse, d. h. Kenntnisse darüber, was zu tun ist, um ein bestimmtes Ziel in einem gewissen Kontext zu erreichen. „The interpretation of the situation depends exclusively of the relational knowledge. In word problems there are two types of such knowledge: general semantic knowledge, the same as for any text, and specific mathematical content, necessary to understand expressions like more than, some more ...“ (S. 130).

BELL & FISCHBEIN & GREER (1984) veranlassten 12- bis 13jährige Schüler, einfache arithmetische Textaufgaben zu lösen - verlangt war nur eine Multiplikation oder eine Division - und umgekehrt zu entsprechenden Rechenausdrücken Aufgabentexte („Geschichten“) zu formulieren. Dabei fanden sie zweierlei:

– Die Fähigkeit, zu einem Text die richtigen Operationen anzusetzen, hängt nicht nur von der Sachstruktur der Aufgabe, sonder auch von der Art der in ihr vorkommenden Zahlen ab.
– Die Fähigkeit, zu Rechenausdrücken passende Textaufgaben zu finden, wie auch die Art der gewählten Texte werden in hohem Maße von den im Ausdruck vorkommenden Zahlen bestimmt. Der Anteil der den Operationen angemessenen Aufgabentexte beträgt beispielsweise 70 % für den Ausdruck 0,51 · 33 und 50 % für den Ausdruck 10,5 · 0,71. Bei Divisionsausdrücken liegt er zwischen 93 % für den Ausdruck 18 : 3 und 10 % für den Ausdruck 9,47 : 1,3.
– Im Fall der Division werden Ausdrücke notiert bzw. Aufgaben formuliert, die eine Vertauschung von Dividend und Divisor bedeuten. In diesem Fall wie auch im Fall eines Divisors kleiner als 1, gehen mehrere Schüler einfach zu einer Multiplikation über.

Man kann nun sicher nicht von gefestigten Operationsbegriffen sprechen, solange die beschriebenen Abhängigkeiten bestehen und die erwähnten Fehler gemacht werden. Die Autoren selbst sprechen in diesem Zusammenhang von einer „meaning blindness“ bei solchen Schülern.

Loftos & *Suppes* fanden Textaufgaben dann schwer zu lösen, wenn sie sich von der vorausgehend gelösten deutlich unterschieden, viele Operationen zu ihrer Lösung nötig waren, die Oberflächenstruktur der Sprache schwierig war oder viele Wörter enthielt, und wenn auch Größenumformungen verlangt waren (zitiert nach NEWMAN 1983).

Die wenigen, sicherlich insgesamt noch unbefriedigenden Befunde zum Verstehen von Aufgabentexten weisen in jedem Fall deutlich darauf hin, dass ein der Problemerfassung dienliches Textverstehen nicht als Selbstverständlichkeit betrachtet werden darf. Die Schüler müssen angeregt werden, nach der Lektüre des Textes ihr Problemverständnis sprachlich zu explizieren, es sich damit deutlicher bewusst zu machen, Abweichungen vom gemeinten Sinn und Lücken in ihm aufzuspüren, und es der Überprüfung sowie der Ergänzung durch den Lehrer oder Mitschüler auszusetzen. Es sollte den Schülern zu einer festen Einstellung werden, die Lösung eines Problems nicht sofort zu beginnen, sondern sich vorher volle Klarheit über dieses zu verschaffen.

2.3.3 Sprache und Problemlösung

NEWMAN (1983) stellt fest: Sobald ein Schüler einen Aufgabentext korrekt aufgefasst hat, ist ein Zwischenschritt nötig, bevor er versucht, die angemessenen mathematischen Prozeduren anzuwenden und das Ergebnis auszurechnen. Diesen Zwischenschritt nennt sie Transformation.

„It is this ability to translate from the language of the task to the required symbolic mathematical form which is termed Transformation“ (S. 27). „The pupil must decide how to solve the problem. Does he have, for example, to add, divide, multiply or subtract“ (S. 28).

Was NEWMAN mit diesem Zwischenschritt meint, stellt nichts anderes dar, als die Realisierung der oben genannten Stufe II des Lösungsprozesses, allerdings beschränkt auf einen Spezialfall von Problemen, nämlich sog. ‘Sachrechenaufgaben’. Weitet man den Blick über diese hinaus, so stellt sich der Prozess der Lösungsfindung etwas komplexer dar. Soll dann die Funktion der Sprache in diesem Prozess erörtert werden, so befindet man sich rasch in dem generellen Problemfeld des Zusammenhangs von Sprache und Denken. Verschiedene wissenschaftliche Disziplinen haben ihn mit ihren Methoden aufzuhellen versucht und sind dabei zu teilweise unterschiedlichen Ergebnissen gekommen. Einige der Positionen können im Anhang „Sprache und Denken“ nachgelesen werden. Letztlich deuten sie aber alle darauf hin, dass sich eine sprachliche Begleitung des Prozesses der Lösungsfindung für diesen als äußerst förderlich erweisen kann. Die verbale Explikation von Ideen regt offenbar nicht nur das schöpferische Denken an, sondern erleichtert auch die Klärung und Kontrolle der Brauchbarkeit von Lösungsideen. Eine Reihe empirischer Untersuchungen zeigt jedenfalls, wie förderlich die Bereitschaft und Fähigkeit zur sprachlichen Darstellung und zur sprachlichen Beschreibung von Voraussetzungen und Strategien für das Problemlösen allgemein und auch für das Lösen mathematischer Probleme im Besonderen ist.

GAGNÉ & SMITH (1962) untersuchten die Wirkung des Verbalisierens auf die Lösung der unter der Bezeichnung "Turm von Hanoi" bekannt gewordenen Aufgabe. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass verbalisierende Gruppen von Versuchspersonen gegenüber nicht verbalisierenden Gruppen signifikant weniger Züge benötigten. Ihre Vermutung ging dahin, dass das Verbalisieren während der Lösung die Versuchspersonen dazu führt, sich stets neue Begründungen für ihre Züge auszudenken, und dass auf diese Weise sowohl die Entdeckung eines Prinzips wie dessen Anwendung erleichtert wird.

MERZ (1969) kommt zu dem Ergebnis, dass bei Aufgaben nach Art des Figure-reasoning-Tests und des Matrizentests nach Ravens verbalisierende Schüler – bei allerdings technisch bedingten, höheren Lösungszeiten – zu signifikanten Leistungssteigerungen kommen. Dabei wird unter Verbalisieren das hörbare Aussprechen der Aufgabenteile, der Teillösungen und der Lösungsschritte verstanden. Kontrollversuche ergaben die Generalisierbarkeit des Befunds auf alle Altersstufen (5 bis 17 Jahre) und Schultypen (Volksschule und höhere Schule). MERZ meint, dass das Verbalisieren den analytischen Lösungsstil begünstige, der seinerseits zu besseren Leistungen führe. Freilich könnte es auch sein, dass sich die verbalisierenden Personen lediglich einige Lösungsprinzipien und Teillösungen besser eingeprägt hatten.

ISSING & ULLRICH (1969) unterwarfen eine Versuchsgruppe von 15-jährigen Knaben und Mädchen in Verbindung mit Konstruktions-, Lege- und Gestaltungsspielen sowie mit Bildgeschichten und einer Signalaufgabe einem intensiven, vierwöchigen Sprachtraining. Diese Gruppe konnte im Stanford-Binet-Test ihren durchschnittlichen IQ-Wert in diesen vier Wochen um 8,8 Punkte signifikant steigern. Die Autoren führen dies auf die Mediationsfunktion der Sprache für das Denken zurück. Sie vermuten, dass durch das Verbalisieren, d. h. hier durch das Beschreiben, Benennen und Zielangeben, Begründen usw. der jeweiligen Aktivität, der Übergang von einem Stimulus zu einer Reaktion erleichtert und u. U. beschleunigt wird.

Zu ganz ähnlichen Befunden kamen JERMAN & SAWFORD (1974) bezüglich der Bewältigung des Mathematics Aptitude Test, NESHER & TEUBAL (1975) für das Lösen arithmetischer Text- und Sachaufgaben sowie IRISH (1964) und JOHNSON (1967) u.a. hinsichtlich formaler arithmetischer Aufgaben.

JOHNSON (1967) meint aufgrund seiner Befunde, vermittelnde assoziative Verknüpfungen zwischen verbalen Antworten könnten die Grundlage für das Finden von Hypothesen schaffen. Dabei müssen vermittelnde verbale Prozesse nicht mit der formalen Struktur von gesprochener oder geschriebener Sprache übereinstimmen, und es kann nötig sein, dass der Denkende die Ergebnisse solcher Operationen in Formen übersetzt, die für die Kommunikation mit anderen passend sind. Auch können Versuchspersonen unfähig sein, über die vermittelnden Prozesse, die sie erleben, verbal oder in anderer Weise zu berichten.

JOHNSON (1967) und REYNOLDS (1968) fanden vor allem den Faktor "Flüssigkeit", der es erlaubt, verschiedene Antworten aufzurufen, und den Faktor "Auswahl" für die möglichen Antworten, die die Forderungen des Problems erfüllen. Ihre Studien zeigen, dass effektives Problemlösen entweder mit verbaler Flüssigkeit i.a. oder mit Flüssigkeit unter einschränkenden Bedingungen verbunden ist. Das Finden und Ausformen von Hypothesen mag oft mit kontrollierter oder relevanter Produktion verbaler Antworten zusammenhängen und spiegelt vermutlich die vermittelnde Funktion verbaler Antwortneigungen wieder.

2.3.4 Sprache und Lösungsdarstellung

NEWMAN (1983) stellt für das Lösen von Sachrechenaufgaben fest, dass der Schüler schließlich prozedurale Fertigkeiten benötige. Sobald er nämlich weiß, wie sich die Aufgabe lösen lässt, d. h. welche Prozeduren er anzuwenden hat, muss er diese ausführen um die Lösung der Aufgabe zu finden. „Process skills can be defined as those mathematical operations or skills which, when applied, allow such things as numerals, symbols, graphic shapes, or word to be manipulated in order to solve a task“ (S. 28).

Ausgeweitet auf die oben genannte Stufe III des Problemlöseprozesses braucht der Schüler aktive Sprachkompetenz. Er soll nämlich nun die gedanklichen Schritte, die von der Problemstellung zur Lösung führen sowie die gefundene Lösung selbst eingehend beschreiben. Das sind nicht nur Beziehungen und Operationen, sondern auch Argumente und Schlussfolgerungen. Die sprachliche Darstellung darf mit anschaulichen Darstellungen, Graphiken, Diagrammen oder ähnlichem verbunden sein, auch wenn – wie im Fall von Beweisen – letztlich nur der formalen Darstellung Bedeutung zuerkannt wird. Eine Rückschau auf den Problemlöseprozess kann versuchen, diesen zu strukturieren und dabei Verallgemeinerbares in ihm zu entdecken. Gelegentlich sollte der Schüler auch vorübergehend eingeschlagene Irrwege und fehlerhafte Zwischenergebnisse offen legen und zu begründen versuchen, warum sie sich als unbrauchbar erwiesen haben. In jedem Fall ist selbständiges und adäquates sprachliches Formulieren unter angemessener Verwendung fachsprachlicher Mittel gefordert.

3. Kommunikation im Mathematikunterricht

Das erste Kapitel dieser Monographie befasste sich vor allem mit der Form und dem spezifischen Charakter der Sprache der mathematischen Kommunikation, wobei auf die Besonderheiten der mathematischen Fachsprache hingewiesen wurde. Im zweiten Kapitel ging es um Beziehungen zwischen Sprache und Mathematiklernen; Rolle und Funktion der Sprache im Lernprozess wurde auch mit Blick auf andere als sprachliche Darstellungsmittel diskutiert. Das dritte Kapitel soll sich nun mit dem Gebrauch der Sprache im Rahmen der unterrichtlichen Kommunikation beschäftigen.

Eine erste Betrachtung des Sprachgebrauchs im Mathematikunterricht führt zur Frage, wer hier Sprache produziert und welches ihre Inhalte bzw. ihr Gegenstände sind. Der Lehrer beansprucht in aller Regel rein quantitativ die größten Anteile an der verbalen Unterrichtskommunikation. Doch kommen sprachliche Äußerungen auch von den Schülern, die neben verbalen auch zahlreiche schriftliche Sprachbeiträge produzieren. Die Präsentation von geschriebenen Texten durch den Lehrer bringt schließlich die Medien als dritten Träger von Sprache im Mathematikunterricht in den Blick. Hier ist vor allem an das Schulbuch und die verwendeten Arbeitsblätter zu denken. Die folgende Übersicht soll zeigen, auf welche Gegenstände bzw. Inhalte sich die sachbezogenen Sprachanteile dieser drei Gruppen am häufigsten beziehen.

Lehrer	– erklärt Begriffe oder Lehrsätze – erläutert die Bedeutung eines Symbols oder einer Sprechweise – definiert einen Terminus oder beweist einen Lehrsatz – beschreibt ein Verfahren oder einen Lösungsweg – formuliert mathematische Aufgaben oder Probleme und – gibt Ergebnisse bekannt
	– leitet das gemeinsam erarbeitende Unterrichtsgespräch mit Fragen und Impulsen bzw. Instruktionen – bestätigt oder korrigiert bzw. kommentiert Schüleräußerungen – gibt Anweisungen und Anleitungen – fasst Gesprächsergebnisse zusammen – diktiert ins Heft
	– unterstützt seine Erläuterungen, Definitionen, Beweise oder Verfahrensbeschreibungen mit schriftlichen Notizen an der Tafel oder auf der Folie des Overhead-Projektors oder – übergibt den Schülern Aufgaben oder Probleme in geschriebener Form, z. B. als Instruktions-, Aufgaben- oder Arbeitsblatt für die Allein-, Partner- oder Gruppenarbeit im Unterricht oder für die Hausarbeit mit allfälliger Verwendung von Computer und Taschenrechner
Schüler	– beantworten im Klassengespräch Fragen – begleiten eine Aufgabenlösung sprachlich – führen Gespräche mit einem Partner oder in einer Gruppe – teilen Lösungswege und Ergebnisse mit – beschreiben Verfahren – wiederholen Begriffserklärungen oder Beweise
	– schreiben Niederschriften bei der Bearbeitung von Aufgaben und Problemen – berichten schriftlich über Lösungswege und Arbeitsergebnisse – produzieren selbst Aufgabentexte

Medien	– Aufgabentexte – Lösungshinweise oder Lösungsbeispiele – Merksätze – Erklärungen – Lehrprogramme linearer und verzweigter Art, präsentiert in Buchform, in einem Sprachlabor oder auf einem Computerarbeitsplatz – Computersoftware, die begrenzte Experimentier-, Lehr- oder Übungsaufgaben übernimmt.

(Detaillierte Klassifikationen für alle im Unterricht auftretenden Sprachäußerungen des Lehrers und der Schüler finden sich bei BELLACK 1974 und SPANHEL 1973)

In der Regel lässt sich keine der oben erwähnten Sprachbeiträge als reine Fachsprache charakterisieren. Es handelt sich eher um eine Alltagssprache, die – in Abhängigkeit vom Träger, vom verhandelten Thema sowie von Schulstufe und Schulart – mehr oder weniger stark von den im Kapitel 1 vorgestellten Merkmalen der mathematischen Fachsprache durchsetzt bzw. im Sinne einer solchen Fachsprache modifiziert ist. In der Regel ist der fachsprachliche Anteil in der Lehrer- und der Mediensprache höher als in den Sprachbeiträgen der Schüler, die den Gebrauch der Fachsprache erst erlernen müssen. Freilich kommt auch die Schülersprache kaum ganz ohne fachliche Sprachmittel aus, weil sich viele Sachverhalte ohne sie gar nicht, nur unzulänglich oder umständlich darstellen lassen. Insgesamt ist der Gebrauch fachsprachlicher Mittel und Sprachformen doch so stark ausgeprägt, dass man der Sprache im Mathematikunterricht einen eigenen Charakter zusprechen kann, der sich nicht nur von dem der Alltagssprache, sondern auch der Sprache in anderen Unterrichtsfächern unterscheidet. Mit dem aus dem Spannungsverhältnis von Lehrer- und Mediensprache auf der einen und Schülersprache auf der anderen Seite resultierenden Lehr- und Lernschwierigkeiten beschäftigt sich Abschnitt 3.1. Dann wird das gegenwärtige Wissen über Struktur und Inhalte der sprachlichen Interaktion, vor allem im Rahmen des sog. fragend-entwickelnden Unterrichts, zusammengetragen (3.2). Dabei zeigt sich die Notwendigkeit, Alternativen zu dieser dominierenden Unterrichtsform zu suchen (3.3).

3.1 Lehrer- und Mediensprache - Schülersprache

In diesem Abschnitt sollen die Lehrer- und Mediensprache im Mathematikunterricht auf der einen Seite und die Schülersprache auf der anderen Seite einander gegenübergestellt werden. Aus der größeren Nähe der ersteren zu fachsprachlichen Merkmalen und Strukturen und der letzteren zu Sprachgewohnheiten des Alltags, ergibt sich, beinahe unvermeidlich, für die unterrichtliche Kommunikation ein Spannungsfeld, aus dem den Schülern bei ihrer Sprachwahrnehmung und Sprachproduktion sowie beim Übergang von gesprochener zu geschriebener Sprache Schwierigkeiten erwachsen können.

Die Untersuchung soll nach zwei sprachlichen Komplexitätsebenen gegliedert und nacheinander bezogen werden

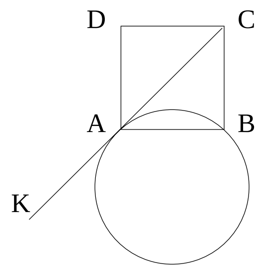
– auf die Ebene von Wörtern und Zeichen, die für einzelne mathematische Objekte oder Beziehungen stehen und Bezeichnungen oder Termini bzw. fachliche Symbole genannt werden (3.1.1) und
– auf die Ebene von Sätzen und Texten wie Definitionen, Lehrsätzen, Argumentationen bzw. Beweise sowie Instruktionen wie Beschreibungen, Erklärungen und Erläuterungen und Aufgaben (3.1.2).

3.1.1 Fachliche Bezeichnungen und Symbole

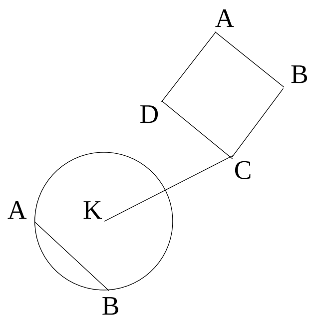
Es gehört sicherlich zu den wichtigen Aspekten des Mathematiklernens, dass die Schüler fähig werden, in ihrer Wahrnehmung fachbezogener Sprache den verwendeten fachlichen Bezeichnungen und Symbolen die vom Produzenten (dem Lehrer bzw. dem Verfasser des Mediums) intendierten Bedeutungen zuzuordnen. Zeichen haben nicht nur Symbolcharakter, d. h. sie bezeichnen ein Objekt oder einen Begriff, sondern darüber hinaus in unterschiedlichem Ausmaß auch Signalcharakter, d. h. sie fordern zu einer Handlung heraus. Der Ausdruck $\frac{d}{dx}\sin(\omega x+\delta)$ kann als Ableitung der Funktion $\frac{d}{dx}\sin(\omega x+\delta)$ $\sin(\omega x+\delta)$ gelesen werden, aber auch als Aufforderung interpretiert werden, diese Ableitung zu berechnen. Aufforderungen dieser Art findet man im Menü computeralgebraischer Systeme wie **V**ereinfachen, **F**aktorisieren, **D**ifferenzieren, ...[12] Jedes Zeichen kann dabei in unterschiedlichem Ausmaß Wissen aufrufen. Im obigen Beispiel kann der Schüler an Differentiationsregeln denken, aber auch an trigonometrische Funktionen und die Bedeutung der Kreisfrequenz und der Phasenverschiebung.

Schüler sollten auch lernen, in ihren eigenen fachlichen Sprachprodukten (verbaler oder schriftlicher Art) fachliche Bezeichnungen und Symbole sinngerecht zu verwenden, um fachliche Inhalte in angemessener Weise sprachlich darzustellen. Wie weit werden diese Ziele tatsächlich erreicht?

Mit der Fähigkeit von Schülern, fachliche Termini und Symbole im intendierten Sinn aufzufassen – ihrem passiven fachlichen Sprachschatz – beschäftigten sich bisher nur wenige Untersuchungen. PATRONIS & SPANOS & GAGATSIS (1994) fanden, dass Schüler beim Lesen mathematischer Aufgabentexte Bezeichnungen oder Symbolen andere Bedeutungen zuweisen, als sie der Verfasser (Lehrer oder Schulbuchautor) seiner Kodierung im Text zugrunde gelegt hat; sie bezeichnen das Phänomen als „semantische Differenz“. Schülern der gymnasialen Oberstufe wurde folgender Aufgabentext vorgelegt: *Gegeben sei eine Sehne AB = 1 und ein Kreis* (*O; R*)*; wir konstruieren ein Quadrat ABCD so, dass BC mit dem Kreisinneren keinen Punkt gemeinsam hat. Bestimme den Radius R, wenn der Tangentenabschnitt CK die Länge CK = 2 hat.*[13] Folgende zwei Schülerzeichnungen zeigen unterschiedliche semantische Differenzen zum Aufgabentext an:



Dieser Schüler kennt offenbar die Bedeutung der Bezeichnung *Tangentenabschnitt* – als Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt außerhalb eines Kreises und dem Berührungspunkt der Tangente durch diesen Punkt – nicht.



Diese Zeichnung signalisiert, über die oben bestehende Differenz in der Auffassung der Bezeichnung *Tangentenabschnitt* hinaus, noch eine völlige Unklarheit über den Gebrauch von Buchstabenvariablen in der Mathematik. So werden A und B als verschiedene Punkte zweimal repräsentiert, und der Buchstabe K vermutlich als Abkürzung für „Kreismitte“ gedeutet.

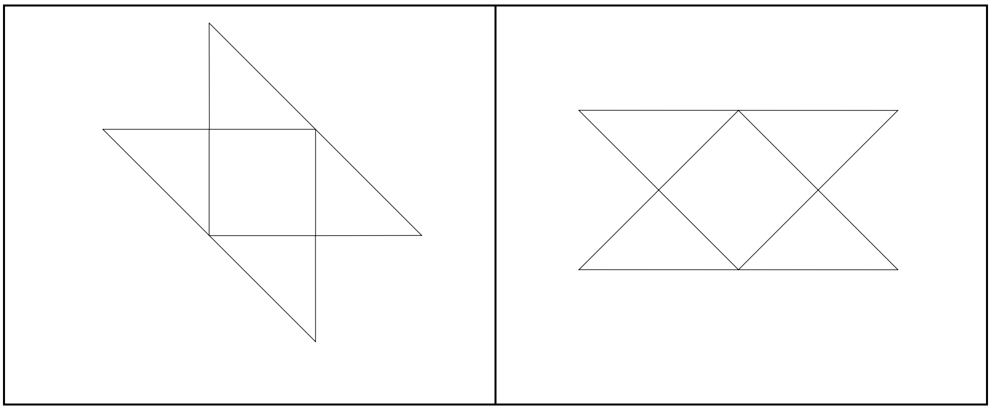
Als weitere Beispiele für semantische Differenz nennen die Autoren die Schülervorstellungen zu den Begriffen Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Raute und Viereck. Die meisten Schüler verbinden mit diesen Bezeichnungen Standardvorstellungen, die ihnen das Erkennen von Sonderfällen und Hierarchien beträchtlich erschweren.

[12] Dieser Unterschied zwischen Symbolcharakter und Signalcharakter kann mit dem Unterschied zwischen Textdateien, die Informationen enthalten und Befehlsdateien (meist an Erweiterungen wie .COM, EXE, ... kenntlich), die sowohl Informationen enthalten als auch beim Aufrufen auf dem Computer Arbeitsschritte auslösen, verglichen werden.

[13] Mit *K* wird dabei der Berührungspunkt einer Tangente von *C* an den Kreis bezeichnet.

Mehr Wissen als über den passiven fachlichen Sprachschatz der Schüler gibt es zu ihrer Bereitschaft und Fähigkeit, in eigenen Sprachprodukten fachliche Termini und Symbole in angemessener Weise zu verwenden, also über ihren aktiven fachlichen Sprachschatz. Untersuchungen mit textlichen Eigenproduktionen ergeben zumeist einen äußerst kleinen Anteil an mathematischem Vokabular und Symbolgebrauch.

GUILLERAULT & LABORDE (1981) analysierten Texte, in denen Schüler zu komplexe geometrische Figuren für einen Mitschüler zu beschreiben hatten, der diese allein aufgrund dieser Beschreibung reproduzieren sollte. Dieser Untersuchungsansatz wurde auch von GALLO (1985) aufgegriffen und förderte hier sehr aufschlußreiche Ergebnisse zutage. Die Forscherin legte den Schülern zunächst folgende zwei punkt- und achsensymmetrische Figuren zur Beschreibung für Mitschüler vor:



Die Figuren konnten auf verschiedene Weise beschrieben werden:

(1) Als Zusammensetzung aus Einzelfiguren (gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken sowie Quadraten, die ihrerseits aus zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken bestehen);
(2) als Überdeckung von zwei Dreiecken, zwei Parallelogrammen oder von mehreren Trapezen;
(3) als Restfiguren, die durch Herausnehmen zweier Dreiecke aus einem Rechteck entstehen;
(4) als Figuren, die aus Strecken zusammengesetzt sind;
(5) als Figuren, die durch Verbinden von Punkten (bestimmter Lage) entstehen.

Eine Analyse der Schülertexte zeigte, dass die Strategien (1) und (2) von jeweils 30% der Schüler angewendet wurden, die Strategie (4) von 20%; die restlichen 20% wählten ein Mischverfahren aus (1) und (4). Die herangezogenen Strategien unterschieden sich allerdings für die beiden gegebenen Figuren nicht unerheblich. Bei der linken Figur wählten 40% der Schüler die Strategie (1), bei der rechten nur 20%; als Überdeckung zweier Dreiecke wurde die linke Figur überhaupt nicht, die rechte in 60% aller Fälle beschrieben. Umgekehrt wurde die Mischstrategie nur im Fall der linken Figur herangezogen (und zwar von 40%). Eine zentrale Rolle spielten in den Beschreibungen Quadrate, senkrechte Strecken (mit gemeinsamen Anfangspunkt) parallele Strecken und gleichschenklige Dreiecke.

Interessant war, mit welchen Bedeutungsvorstellungen die Schüler bei ihren Beschreibungen geometrische Fachbezeichnungen verbanden. Besonders auffallend war, dass sie mit einer Bezeichnung oft die Vorstellung eines Standardmodells verbanden, welches sie daran hinderte, diese Bezeichnung im generellen Sinn anzuwenden. So wurden Quadrate nur dann als solche bezeichnet, wenn in der Zeichnung ihre Seiten parallel zu den Blatträndern war. Standen sie auf einer Spitze, so stellte es für die Schüler eine Raute dar; denn das „Standardmodell" für diese ist offenbar eine auf der Spitze stehende Figur. Lag bei einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck eine Kathete horizontal, so wurde nur seine Rechtwinkligkeit wahrgenommen; lag die Hypotenuse waagrecht, so nur die Gleichschenkligkeit. Den geometrischen Fachterminus *Strecke* ersetzten die meisten Schüler durch Ausdrücke wie *Linie*, *Gerade*, *Halbgerade*, *Kathete*, *Senkrechte*, *Höhe*; anstatt von *Punkten* sprachen sie von *Orten*, *Endpunkten*, *Randpunkten*, *Ecken*, usw. Das Wort *gleich* verwendeten sie zumeist im Sinne von *kongruent*.

Geometrische Abbildungen wurden so gut wie überhaupt nicht benannt. Insgesamt war die Sprache weniger eine geometrische als eine physikalische, deren Wortschatz dem Bereich des manuellen Tuns oder der visuellen Wahrnehmung entnommen ist und in der Strecken *aneinanderstoßen*, Parallelen *sich berühren*, Verlängerungen *abzweigen*, Strecken von einer Grundlinie *ausgehen* oder auf einer Grundlinie *stehen*, Linien *sich überschneiden* oder *kreuzen*, Dreiecke zwischen sich *Platz lassen*, oder sich mit einer Seite *treffen*, usw.

Die Schüler schienen im Übrigen viel zu wenig zu berücksichtigen, dass die Beschreibung der Figuren für den Zeichner eine Botschaft darstellen sollte, aus der er alle wichtigen Informationen übernehmen kann. So fehlten oft wesentliche Angaben, vor allem über Längen und Längengleichheiten, über die Lage von Figuren in der Ebene, die Lage eines Figurenteils bezüglich der übrigen, explizite Angaben über Regelmäßigkeiten in der Figur, usw. Vieles erschien den Kindern offenbar evident bzw. selbstverständlich und daher nicht der Mitteilung wert. Der Analyse der Autorin nach waren nur 20% der Angaben im Text dekodierbar, während 70% keine kongruente Rekonstruktion von Figuren ermöglichten.

Maier kam mit einem entsprechenden Untersuchungsansatz, bei dem Hauptschüler aus 7. und 8. Jahrgangsstufen eine relativ komplexe geometrische Zeichnung zur Beschreibung vorgelegt wurde, zu durchaus vergleichbaren Resultaten, die sich so zusammenfassen lassen.

- Die Schüler verwendeten sprachliche Bezeichnungen für geometrische Figuren, Eigenschaften und Beziehungen, die ihnen eigentlich vom Unterricht her vertraut sein sollten, mit sehr unterschiedlicher Häufigkeit. Aber nur wenige machten in optimaler Weise von ihnen Gebrauch. Die meisten behalfen sich mit umgangssprachlichen Beschreibungen, z. B. *Mitte* anstelle von *Mittelpunkt*, *Schiefeck* anstelle von *Parallelogramm*, *Grundlinie* anstelle von *Seite* (eines Vielecks). Wo ihnen auch dies nicht möglich war, lösten sie Figuren in ihre Bestandteile auf und beschrieben Linienverläufe.
- In der Liste der Häufigkeiten für eine korrekte Verwendung (im Sinne der erlernten Begriffsbedeutung) standen folgende Wörter an der Spitze*: Kreis, Quadrat, Dreieck, Länge* und *Mittelpunkt*. Am Ende der Liste erschienen Bezeichnungen wie *Trapez, Raute* und *Strecke* sowie nahezu sämtliche Eigenschafts- und Beziehungsbegriffe, wie z. B. *rechtwinklig, gleichseitig, parallel, diagonal, deckungsgleich* bzw. *kongruent,* usw.
- Erstaunlich viele fachliche Bezeichnungen wurden in einem, vom fachlichen abweichenden Bedeutungsverständnis gebraucht. Dies galt vor allem für Bezeichnungen wie *senkrecht* (verwendet als Eigenschaft einer Linie, die parallel zum rechten und linken Blattrand verläuft), *Seite* (verwendet als Bezeichnung für ein Flächenstück [14]), *Höhe, Kante, Ecke*, aber auch Ausdrücke wie *Trapez Raute, Rechteck, Quadrat*.
- Fachliche Symbole, auch im Unterricht häufig gebrauchte, erschienen in den Texten so gut wie überhaupt nicht. Weder kamen die Schüler auf die Idee, sich die Beschreibung durch Bezeichnen von Punkten und Geraden mit Buchstaben zu erleichtern, noch gebrauchten sie Kürzel wie $\|$ oder $\perp$. Neben den Abkürzungen für Maßeinheiten der Länge, die fast durchgängig verwendet wurden, erschienen lediglich sporadisch: h für *Höhe*, l für *Länge*, b für *Breite*, r für *Radius* und d für *Durchmesser*.
- In vielen Fällen wären sprachliche Mittel aus der Abbildungsgeometrie hilfreich gewesen (z.B. Drehung und Achsenspiegelung), um zu einer knappen und eindeutigen Beschreibung zu kommen. Doch obwohl einschlägige Sprachmittel im Unterricht vorkamen, machten die Schüler davon nicht Gebrauch.
- Besondere Schwierigkeiten bereitete es den Schülern, die Lage von Punkten, Strecken und Figuren zueinander eindeutig zu beschreiben. Die meisten klammerten sich an den Blattrand und verwendeten, unter implizi-

[14] Man beachte, dass die Seite eines Buches ein Flächenstück ist.

ter Bezugnahme auf diesen, Ausdrücke wie *rechts neben*, *links von, unterhalb, über.* Da sie ausnahmslos darauf verzichteten, die Mitteilungen für den Partner durch Winkelmessungen zu präzisieren, gelang ein angemessenes Beschreiben von nicht am Blattrand orientierbaren Lagebeziehungen kaum. Die meisten Schüler begnügten sich mit recht ungenauen Angaben wie *schräg nach oben, schief rüber, quer herunter, schräg von rechts nach links, nach rechts,* aber *auch rauf, quer nach links*, usw. Vielfach ließen die Schüler Richtungsangaben und Lagebeziehungen einfach aus, so dass der Zeichner über sie keinerlei Informationen erhielt.

KUBLER (1984) untersuchte die Fähigkeit von Schülern, mathematische Sachverhalte mitzuteilen sowie die dabei verwendete Sprache auf folgende Weise: Ein Versuchsleiter (Lehrer) erklärte einem Schüler ein Verfahren zu Konstruktion des in einen Kreis einbeschriebenen regulären Fünfecks. Dies geschah in zwei Varianten, nämlich durch verbale Konstruktionsanweisung, die der Schüler auszuführen hatte, also nach Art eines ‘Diktats’ in fachlicher Sprache, oder durch zeichnerisches Vorführen der Konstruktion ohne jegliche verbale Begleitung. Nachdem sichergestellt war, dass der Schüler die Konstruktion tatsächlich beherrschten, wurde er gebeten, sie einem anderen Schüler, der mit ihm Rücken an Rücken saß, so zu erklären, dass dieser sie ausführen kann, und auch auf Fragen dieses Mitschülers zu antworten. Zuletzt wurde geprüft, ob der „Empfänger“ der Botschaft die Konstruktion richtig gemacht hatte und nunmehr beherrschte. Bei der Untersuchung wurden in einer 5. und einer 4. Klasse [15] insgesamt 18 Schülerpaare gebildet, die abwechselnd die Rolle des ‘Senders’ und des ‘Empfängers’ übernahmen.

Mit Blick auf die Sprache, die die jeweiligen ‘Sender’ bei der Mitteilung des Konstruktionsverfahrens verwendeten, kam KUBLER zu folgenden Ergebnissen:

- Die Sender, denen das Verfahren ‘diktiert’ wurde, benutzten zwar Fachausdrücke wie *Durchmesser*, *Tangente*, *Kreisbogen,* etc., aber sie fügten ihnen beinahe immer noch vertrautere Ausdrücke hinzu, wie z. B. *Linie, die durch den Mittelpunkt geht, gestreift*, usw.
- Die Sender, denen die Konstruktion nur gezeigt worden war, griffen durchgehend auf alltagssprachliche Formulierungen zurück und gebrauchten (mit Ausnahme einiger Fälle in der Klasse 4) kaum mathematische Ausdrücke.
- Von der 5. zur 4. Klasse zeigten sich Fortschritte der Schüler in dem Sinn, dass man ein stärkeres Hereinnehmen mathematischer Formulierungen und ein zunehmendes Bedürfnis beobachtete, beim Diktat durch den Versuchsleiter (Lehrer) das eigene Verständnis des Konstruktionsverfahrens zu kontrollieren. Letzteres erhöhte den Erfolg in der Klassenstufe 4 bei diesem Verfahren; es trat aber beim Vorführen der Konstruktion eher weniger in Erscheinung.

Was ließ sich aber zur Verwendung einzelner mathematischer Begriffe durch die Sender finden?

- Das Wort *Punkt*, das den Schülern wohl bekannt ist, wurde zwar im Zusammenhang von Aussagen wie *Bezeichne diesen Punkt mit A* verwendet. Wenn es sich allerdings um Schnittpunkte von Kurven handelte, wurde das Wort *Punkt* meist nicht gebraucht, sondern durch Ausdrücke wie *Schnittstelle, auf der Kreuzung, die den Kreis in zwei Teile zerschneidet,* usw. ersetzt. Es fiel auch auf, dass die Schüler stets zwar Punkte auf Geraden platzierten, aber niemals von der Möglichkeit Gebrauch machten, eine Gerade durch zwei Punkte zeichnen zu lassen.
- Das Wort *Strecke* tauchte spontan bei den Schülern nicht auf; sie zogen es vielmehr vor, von *Linie*, *Gerade*, o. ä. zu sprechen.
- Im Gegensatz dazu verwendeten alle Schüler Klasse 4 das Wort *Kreis*, während in Klasse 5 noch ein Viertel der Schüler vom *Runden* sprach.

---

[15] Die Untersuchung bezieht sich auf eine französische Schule mit absteigender Zählung der Jahrgangsstufen

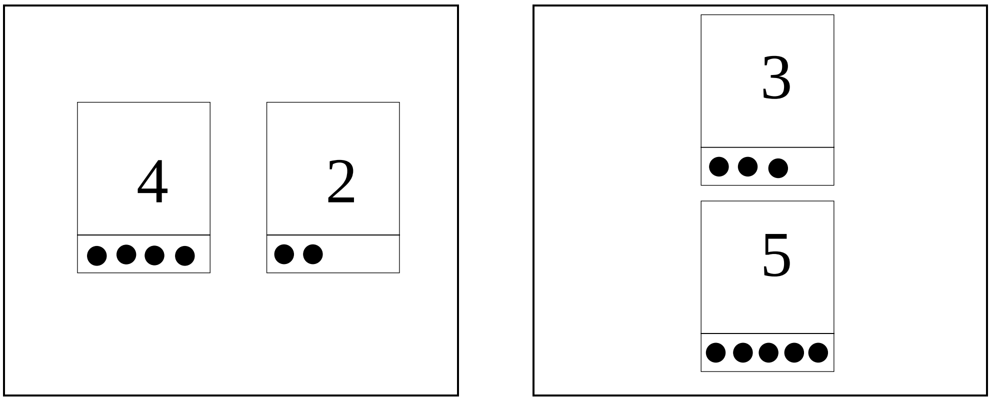
– Die Schüler verstanden das Wort *Durchmesser*, verwendeten es aber selbst nicht, vor allem nicht in Klasse 5, sie sprachen stattdessen von *Linie, die durch O geht* o. ä.
– Der Ausdruck *senkrecht* wurde auch eher von den älteren Schülern verwendet; in Klasse 5 tauchten für ihn Ausdrücke wie *waagrecht* und *senkrecht* auf.
– Anstelle des Ausdrucks *Kreisbogen,* der durchgängig gemieden wurde, sprachen die Schüler von *Halbkreis* oder *Zeichne eine Linie mit deinem Zirkel*.

Auffallende Defizite im Verständnis und dem Gebrauch geometrischer Bezeichnungen zeigten sich auch im Rahmen einer unveröffentlichten Untersuchung von *Maier* über den Zusammenhang zwischen Begriffsverständnis und Fehlern bei der Berechnung geometrischer Flächen. Schülern einer zufällig ausgewählten 6. Klasse bezeichneten Würfel als *Quadrate*, Quader als *Rechtecke,* Kanten als *Seitenflächen* oder *Längen*, Ecken als *Seiten* oder *Deckflächen*. 22 von 31 Schülern konnten keine sinnvollen Angaben über Beziehungen zwischen Quaderkanten machen. Die Aufgabe *Zeichne ein vom vorgezeichneten Rechteck in der Form verschiedenes Rechteck mit gleichem Flächeninhalt (bei dem eine der Seiten 2 cm lang ist*), lösten nur 7 (von 31) Schüler korrekt. 8 Schüler zeichneten ein kongruentes Rechteck, jedoch um 90^o gedreht oder sonst in anderer Position, 6 Schüler ein formverschiedenes aber umfanggleiches. Den Satzanfang *Ein Rechteck ist ...* führten nur zwei Schüler sinnvoll, korrekt und vollständig weiter. Beispiele für Antworten: *Ein Rechteck ist zwei verschiedene Seiten*. *Ein Rechteck ist ein Quader. Ein Rechteck ist, wenn alle Seiten gleich lang sind*. Schwierigkeiten hatten die Schüler auch hier mit der mathematischen Symbolsprache. Beispielsweise sollten sie Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks angeben, dessen Seitenlängen mit s und t beschrieben waren. Beim Inhalt schrieben vier Schüler richtig $s \cdot t$ und vier Schüler $l \cdot b$, während beim Umfang immerhin elf Schüler die korrekte Lösung $2 \cdot s + 2 \cdot t$ zustande brachten. Typische Fehlantworten, offenbar aufgrund mangelnder Unterscheidung zwischen Strecken und Flächen- bzw. zwischen Umfangs- und Inhaltsberechnung: $s \cdot s + t \cdot t$ oder $s + s \cdot t + t$.

Solche Beobachtungen stehen in vollem Einklang mit Befunden anderer Autoren. SCHMIDT (1982) führte im Rahmen seiner Dissertation „Der Begriffsbildungsprozess im Geometrieunterricht“ bei 243 Schülern der 5. Jahrgangsstufe einen Vortest zum Thema Achsenspiegelung durch. Aus den Ergebnissen ergibt sich u. a.: Über 90% der Schüler ordnen der Bezeichnung *senkrecht* nur Linien zu, die *von oben nach unten gehen*. Das Wort *parallel* hingegen verwendeten 80% im mathematischen Sinn. Der Begriff RECHTER WINKEL ist in seiner fachlichen Bedeutung ca. 65% der Schüler bekannt. Nur 21% der Schüler können den Abstand eines Punktes von einer Strecke bestimmen. 17% zeichneten vom Punkt aus eine schräge Linie zur Strecke, 8% eine Verbindung zu einem Streckenendpunkt und 4% eine Vertikale auf die Strecke.

In die gleiche Richtung weisen Beobachtungen von VIET (1978) und VOLLRATH (1978) sowie eingehende Untersuchungen zu einzelnen geometrischen Begriffen (SENKRECHT, INHALT) mit der Methode explorativer Einzelgespräche (siehe FRAUNHOLZ & MAIER & TROMMSDORFF 1986). Einen beträchtlichen Mangel an sprachlichen Ausdrucksmitteln beobachtete auch JANVIER (1987) der Schüler höherer Jahrgangsstufen kartesische Graphen interpretieren ließ. Den Schülern fehlte die Fähigkeit, sich über Intervalle, Maxima und Minima, Unstetigkeiten, Steigung usw. angemessen auszudrücken.

DURKIN u.a. (1990) berichten über eine quantitative Studie, in der sie sich mit dem Gebrauch der englischsprachigen Begriffe der räumlichen Orientierung UP, DOWN, HIGH, LOW durch 5- und 6jährige Kinder beschäftigten. Vor allem wollten sie herausfinden, ob die Versuchspersonen diese Begriffe, dem jeweiligen Kontext angemessen, in gleicher Weise zur Beschreibung räumlicher wie numerischer Beziehungen verwenden können. Es zeigte sich: Wenn es darum ging, mit den genannten Bezeichnungen räumliche Beziehungen zwischen zwei (kreisförmigen, quadratischen, dreieckigen, usw.) Formenplättchen zu beschreiben, hatten die Schüler sehr hohe Erfolgsraten. Anders war dies, wenn sie bezüglich zweier Zahlenkärtchen die Aufforderung befolgen sollten: C*an you* *point to the high/low number? Can you point to the number that has gone up/down?* Die Kinder machten relativ viele Fehler, wenn die Kärtchen nicht nebeneinander, sondern übereinander lagen und dabei die numerische Beziehung mit der räumlichen in Konflikt stand (siehe nachfolgende Zeichnung). Beträchtliche Auswirkungen hatte auch die Reihenfolge, in der die Testitems dargeboten wurden. Gingen die numerischen Items den räumlichen voraus, so erreichten die Schüler bei ersteren noch eine Erfolgsquote von 70 Prozent der möglichen Punkte. Folgte sie jedoch den räumlichen Items nach, so sank diese auf 20%. (Die Reihenfolge wirkte sich auch auf die räumlichen Items aus. Wurden nämlich diesen die numerischen vorangestellt, so sank auch hier die Erfolgsquote von nahezu 100% auf 85%).



Bei vorsichtiger Verallgemeinerung könnte man aus solchen Feldstudien den Eindruck gewinnen, dass die den Schülern aktiv verfügbaren sprachlichen Ausdrucksmittel zur Darstellung mathematischer Sachverhalte sehr begrenzt sind (insbesondere z. B. im Bereich geometrischer Eigenschaften und Beziehungen), dass viele Schüler nur einen sehr geringen Teil der im Unterricht verwendeten Sprachmittel einsetzen, wenn sie gefordert sind, Sachverhalte spontan, ohne Lehrerhilfe sprachlich darzustellen, und dass sie recht häufig im Mathematikunterricht - auch in fachlichen Zusammenhängen - erlernte Fachbezeichnungen bei eigenständiger Verwendung in einer normabweichenden Bedeutung benutzen.

Die Defizite im Verstehen mathematischer Begriffsbezeichnungen und Symbole sowohl im Bereich der Sprachwahrnehmung wie der Sprachproduktion von Schülern lassen sich verschieden deuten. Einige Erklärungsversuche sollen nachfolgend angeboten werden.

a) Zu hohe Anzahl fachsprachlicher Bezeichnungen

Der Anteil an fachsprachlichen Bezeichnungen und Symbolen in der Lehrer- und Mediensprache wird vielfach quantitativ unterschätzt. Im Fall von Schulbüchern lässt er sich besonders leicht nachprüfen. Eine Analyse der Erklärungen und Aufgabentexte in einem Unterrichtswerk, das für den Gebrauch an bayerischen Gymnasien entwickelt wurde, ergab folgende Anzahlen fachliche Bezeichnungen, deren Bedeutung jeweils neu zu erlernen ist: für die 5. Klasse: 172, für die 6. Klasse: weitere 109, für die 7. Klasse: weitere 70 und für die 8. Klasse: weitere 111. Auf einer Seite aus dem Band 5 dieses Schulbuchwerks (siehe folgende Seite) geht es um die Einführung in den Winkelbegriff. Allein hier werden 15 fachliche Bezeichnungen – zum größten Teil erstmals – verwendet*: Winkel, Scheitel, Schenkel, Punktmenge, Halbgerade, Winkelfeld, Winkelbogen, Winkelbezeichnungen, Nullwinkel, spitzer Winkel, rechter Winkel, stumpfer Winkel, gestreckter Winkel, überstumpfer Winkel* und *Vollwinkel*. Außerdem werden als mathematische Symbole gebraucht oder neu eingeführt: S für *Scheitelpunkt*, g und h für Halbgeraden, $\angle$ (g,h) für Winkel zwischen diesen Halbgeraden, Winkelbezeichnungen α und ß, die Ungleichung $\alpha \neq$ ß, ein kleiner Kreissektor als Symbol zur Kennzeichnung von Winkeln in der zeichnerischen Darstellung, speziell zur Kennzeichnung eines rechten Winkels zusätzlich mit einem Punkt versehen.

Winkel und Winkelmessung

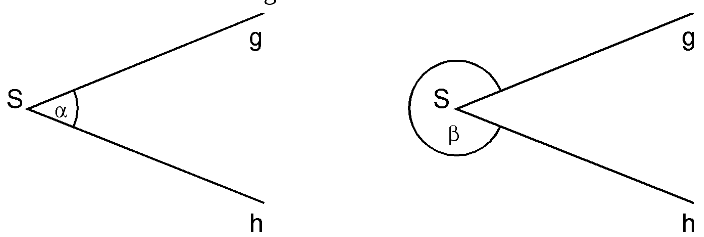
Handwerker nennen oft das Senkrechtstehen zwischen zwei Dingen „im Winkel sein“. Dieser Sprachgebrauch reicht für die Geometrie nicht aus.

Definition Gehen von einem Punkt S (genannt Scheitelpunkt) zwei Halbgeraden g und h (genannt Schenkel) aus, so bestimmen g und h den Winkel $\angle$ (g,h).

Winkel kennzeichnen wir durch kleine griechische Buchstaben, deren Namen du auf Seite 19 findest, z. B. $\angle$ (g,h) = α, gelesen: „Winkel zwischen g und h gleich alpha“.

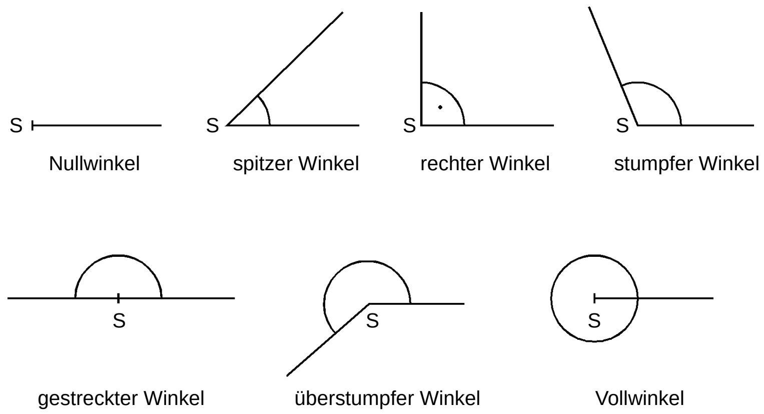
Manchmal nennt man die Punktmenge, die von den Halbgeraden eingeschlossen wird, einen Winkel oder genauer ein Winkelfeld.

Beachte Zu den Schenkeln g und h gehören zwei verschiedene Winkel $\alpha \neq \beta$, die wir durch verschiedene Winkelbogen unterscheiden:



Der Winkel ist ein Begriff der Zeichenebene. Wie man Winkel im Raum definiert, wirst du später lernen.

Bezeichnungen Verdeutliche dir die folgenden Winkelbezeichnungen an verschiedenen Einstellungen der Schenkel deines Zirkels:



Das Bestreben, Klassifikationen und Fallunterscheidungen systematisch und vollständig durchzuführen und zu explizieren, führt in Einzelfällen zu einer deutlichen Vermehrung von Fachbegriffen. Beispiele sind die auf der abgedruckten Schulbuchseite vorgenommene Einteilung von Winkeln mit den Begriffen Nullwinkel, spitzer, rechter, stumpfer, gestreckter, überstumpfer Winkel und Vollwinkel oder die Klassifikation von Geraden aufgrund möglicher Lagebeziehungen zu einem Kreis (Begriffe Passante, Tangente, Sekante und Zentrale). Die meisten dieser Bezeichnungen werden nach ihrer Einführung kaum noch gebraucht. So reicht in den meisten geometrischen Situationen bei Winkeln die Unterscheidung nach spitzen, rechten und stumpfen aus, und von den Bezeichnungen für Geraden wird letztlich nur noch das Wort *Tangente* weiter verwendet. Oft erscheint die Einführung vieler fachlicher Termini gar nicht vom Zweck ihrer Verwendung als adäquates Ausdrucksmittel für mathematische Sachverhalte her begründet, sondern eher als eine Art Selbstzweck.

In einer umfangreichen Analyse von Schulbüchern ermittelte LÖRCHER (1976) die Anzahl ‘mathematischer Begriffe’, worunter er alle Bezeichnungen zusammenfasste, die die Schüler aus der Umgangssprache überhaupt nicht oder nur in anderer Bedeutung kennen. Er kam damals bei der Untersuchung der Bruchrechenkapitel in zehn Schulbüchern auf 400 derartige Begriffe pro Buch. Dabei gab es viele ad hoc neu gebildete Bezeichnungen oder Fachtermini, die aber anschließend kaum weiter verwendet wurden. Zwischen 30% und 50% aller in einem Schulbuch vorkommenden Fachwörter kamen nur auf einer einzigen Seite vor. Von den 527 ‘mathematischen Begriffen’ eines Schülerbuchs für die 8. Klasse kommen nur 28% auch in den Büchern für die drei anderen Klassenstufen vor.

In vielen Fällen wurde mit neuen Bezeichnungen das angestrebt, was LÖRCHER eine „unzumutbare Präzisierung und Verfeinerung der mathematischen Begrifflichkeit“ (S. 4) nennt: Gemeint sind z. B. terminologische Unterscheidungen zwischen *Zahl*, *Zahlname*, *Zahlwort*, *Zahlzeichen*. Die Erklärung all dieser Bezeichnungen erwies sich zumeist als unsystematisch und in vielen Fällen unzulänglich. Der gleiche Sachverhalt wurde in verschiedenen Schulbuchwerken, oft sogar in verschiedenen Bändern des gleichen Werks, auf unterschiedliche Weise bezeichnet, so dass die Schüler bei einem Klassen- oder Ortswechsel unvermeidlich ‘umlernen’ müssen.

Die Analyse eines Schulbuchwerks für die Grundschule erbrachte ganz ähnliche Ergebnisse. Von einem Schuljahr zum nächsten kamen jeweils etwa 240 neue Bezeichnungen hinzu, von denen aber etwa 80 im darauffolgenden Schuljahr nicht mehr aufgegriffen wurden. Selbst in den jeweiligen Wiederholungskapiteln wurden im 2. Schuljahr nur 48%, im dritten Schuljahr nur 37% und im 4. Schuljahr nur 22% der im Vorjahr eingeführten Begriffe wieder verwendet.

Im Übrigen sind nicht alle Wörter der Lehrer- und Mediensprache, deren (genaue) Bedeutung die Schüler von ihrer alltäglichen Sprachpraxis her nicht kennen, Fachwörter der Mathematik. Lehrer und Schulbücher pflegen auch andere Vokabeln in den Unterricht einzubringen, mit deren Hilfe sie den Schülern das Verständnis fachlicher Zusammenhänge erleichtert werden soll. Schon in den ersten Jahrgangsstufen werden anstelle von *plus* Wörter wie *und*, *vermehrt um*, anstelle von *addieren* die Bezeichnungen *dazuzählen*, *zusammenzählen* oder, *vergrößern* verwendet. Oftmals werden mit diesem ‘didaktischen Vokabular’ spezielle schulische Darstellungsweisen für mathematische Gegenstände bezeichnet. In dem Unterrichtswerk, aus dem die oben abgedruckte Seite stammt, finden sich beispielsweise folgende Bezeichnungen, die dem didaktischen Vokabular zuzurechnen sind: im Band für die 5. Jahrgangsstufe: *Rechenbaum, Überschlag, Zweisatz*; im Band für die 6. Jahrgangsstufe: *Bruchoperator, Gegenoperator, Bruchteil, Hauptnenner, Umwandeln, zerlegbare Zahl, Endstellenregel, Prioritätsregel*; im Band für die 7. Jahrgangsstufe: *Kehrzahl, Zuordnungstafel, Schlussrechnung, quotientengleich, stückweise kongruent*; im Band für die 8. Jahrgangsstufe: *Besetzungszahl, Einsetzungsmenge, Balkendiagramm*.

Solche Ausdrücke vermehren die Anzahl der Sprachelemente, denen die Schüler neue, vom Lehrer bzw. dem Medium normierte Bedeutungen zuordnen müssen. Je größer aber der Umfang des Vokabulars wird, das für die Schüler in seiner Bedeutung zunächst unbekannt und fremd ist, desto größer wird die Herausforderung an sie, die mit seiner Hilfe ausgedrückten mathematischen Sachverhalte, Erklärungen, Instruktionen und Aufgaben im intendierten Sinne aufzufassen und zu verstehen. Noch größer aber wird vermutlich das Hindernis, die vielen Termini und Symbole in den aktiven Sprachschatz zu integrieren. Um diese Herausforderung für die Sprachwahrnehmung und Sprachproduktion anzuzeigen, gehen manche Autoren so weit, die Lehrer- und Mediensprache als eine Art Fremdsprache für die Schüler zu beschreiben, die es zu erlernen gelte (siehe LÖRCHER 1976 und BECHERVAISE 1992).

b) Interferenzen zwischen fachlichen und alltagssprachlichen Bedeutungen

Offenbar gilt nur für wenige der im Unterricht auftauchenden Fachwörter, zu denen die Schüler ein Bedeutungsverständnis aufbauen müssen, dass sie in der Alltagssprache, zumindest in der gegebenen Zusammensetzung, nicht oder kaum vorkommen. Beispiele: *kommutativ, Term, Vektor, Koordinaten(system), Determinante, Diskriminante, Polygon, n-Eck, Polyeder, Parallelogramm, affin* oder *Geradengleichung, Umkehrfunktion, Halbebene, Kongruenzabbildung, Kegelschnitt, Hypotenuse, Multiplikand*. Sehr viele Fachwörter aus der Lehrer- und Mediensprache im Mathematikunterricht treten jedoch auch in der Alltagssprache auf. Einige davon gehören sogar zum Grundwortschatz des Alltags: *Kreis, Dreieck* oder *Höhe*, usw. sowie die Zahlwörter. Andere wurden in die Alltagssprache übernommen, z. B. *Tangente, parallel, senkrecht, Gleichung, Ellipse Kegel,* und *Trapez* sowie Bezeichnungen für Maßeinheiten wie m, cm^2, dm^3. Andererseits führte man in der Mathematik bei der Entwicklung neuer Theorien oftmals Ausdrücke der Alltagssprache als Fachwörter ein; man denke an Bezeichnungen wie *Ebene, Netz, ähnlich, Gruppe, Ring, Körper*, usw. Für manche Wörter lässt sich die Wanderrichtung zwischen Fach- und Alltagssprache gar nicht mehr genau bestimmen, wie etwa für *Seite, Strecke, Figur, Pyramide, Zylinder, Funktion, Potenz, ist gleich, kongruent*, usw.

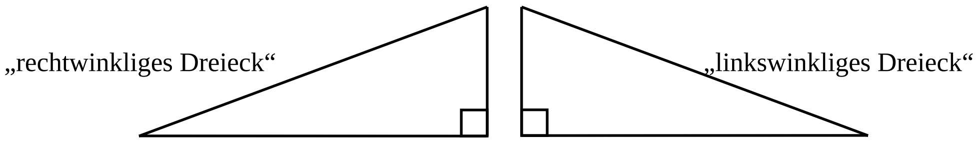
Nun werden aber nur wenige Wörter der Alltagssprache, die auch in der Fachsprache vorkommen, dort in der gleichen Bedeutung verwendet. Ausnahmen sind vielleicht *Quadrat* und *Dreieck* sowie Bezeichnungen der natürlichen Zahlen und einige geometrische Maßeinheiten. In den meisten Fällen unterscheidet sich die fachliche von der in der Alltagssprache üblichen Bedeutung, so dass die Schüler in den Unterricht zu dort eingeführten Fachbegriffen bereits Bedeutungsvorstellung mitbringen, jedoch solche von anderer Art.

– Diese sind manchmal weiter bzw. allgemeiner als die fachliche Bedeutung, wie z. B. bei den geometrischen Bezeichnungen *ähnlich* (fachlich auf formgleiche Figuren beschränkt), *parallel* (fachlich nur auf eine Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen angewendet), *Seite* (fachlich zumeist nur auf *n*-Ecke begrenzende Strecken bezogen), *Umfang* (fachlich nur die Länge der Begrenzungslinien von *n*-Ecken, Kreisen oder Ellipsen bezeichnend), sowie im Fall von Wörtern wie *Steigung* (fachlich beschränkt auf ein Koordinatenverhältnis bei Geraden), *orientieren*, *potenzieren*;
– manchmal sind sie enger bzw. spezieller als die fachliche Bedeutung, wie z. B. bei *Viereck* (im Alltag zumeist synonym zu *Rechteck* oder *Quadrat* angewendet), *Pyramide* (darunter fallen hier nur gerade Körper mit quadratischer Grundfläche), *Fläche* (eine gekrümmte Fläche macht nach alltagssprachlichem Verständnis keinen Sinn, da sie nicht flach ist), *senkrecht* (im Alltag eher synonym zu lotrecht gebraucht);
– manchmal folgen sie einer anderen Systematik, wie bei der Verwendung von *Breite*, *Höhe* und *Tiefe* bei Möbeln, die nicht mit der mathematischen Terminologie *Länge*, *Höhe* und *Breite* für Quader übereinstimmt;
– sie können aber auch von der fachlichen Bedeutung verschieden sein, wie im Fall von *Figur, Mantel, Scheitel, Betrag, Gruppe, Ring, Körper*.

In einigen Fällen ist die fachliche Bedeutung zugleich spezieller und allgemeiner; z. B. wird im Alltag das Wort *Menge* nur auf größere Quantitäten angewandt (*eine Menschenmenge* bezeichnet eine größere Anzahl von Menschen, *eine Menge Geld* bezeichnet viel Geld; es gibt im Alltag keine Menge mit einem oder zwei Elementen oder gar eine *leere Menge*). Der Begriff schließt auch kontinuierliche Quantitäten ein (wie z. B. *eine Menge Bier*). Ebenso bedeutet *spiegeln* im Alltag mehr als die Spiegelung an einer Geraden oder an einer Ebene, aber man denkt nicht an Schrägspiegelung oder Punktspiegelung.

Besonders deutlich lassen sich Unterschiede zwischen alltäglicher und fachlicher Bedeutung für den im obigen Schulbuchauszug eingeführten Begriff WINKEL aufzeigen. In der deutschen Alltagssprache wird das Wort *Winkel* benutzt, um einen Teil eines Raumes, eines Dorfes oder einer Landschaft zu bezeichnen. Es wohnt ihm der Sinn des Geschlossenen, manchmal auch des Engen inne. Solche Sinnzuschreibungen können gut helfen, mathematische Winkel zu verstehen, die durch zwei Flächen im dreidimensionalen Raum gebildet werden, vor allem, wenn sie ungefähr 90 Grad messen. Im Mathematikunterricht müssen die Schüler aber ihrem Sinnverständnis völlig neue Vorstellungen hinzufügen, wenn – wie zumeist – mit beliebigen Winkeln in der Ebene gearbeitet wird, die durch zwei sich schneidende Geraden gebildet sind. Dies gilt vor allem für Winkel, die man in der Mathematik *stumpf*, *überstumpf* oder gar *gestreckt* nennt. Schließlich versuche man sich die Verallgemeinerungsleistung eines Schülers zu vergegenwärtigen, die nötig ist, wenn von einem *Null*- oder *Vollwinkel* geredet wird.

Manche Bedeutungsinterferenzen ergeben sich auch dadurch, dass sich der Sinn zusammengesetzter mathematischer Fachausdrücke nicht unbedingt aus der umgangssprachlichen Interpretation einzelner Wörter erschließen lässt. PIMM (1987) erwähnt das Beispiel einer umgangssprachlichen Interpretation von *rechtwinkliges Dreieck* im Sinn folgender Zeichnungen:



Das Adjektiv *recht* hat im Alltag zwei Bedeutungen: *rechtes Bein* (als Gegensatz zu *linkes Bein*) und *auf rechte Weise* (=auf richtige Weise). Die Verwendung von *recht* in der Bedeutung *richtig*, ist aber auf wenige Redewendungen und zusammengesetzte Wörter eingeschränkt. In der Mathematik wird die erste Bedeutung als Orientierungsbegriff in der Geometrie verwendet (Rechtskoordinatensystem, Linkskoordinatensystem); die zweite Bedeutung liegt im Ausdruck *rechter Winkel* vor (weswegen es auch keinen *linken Winkel* gibt!), ist aber auf dem ersten Blick nicht erkennbar (ein Vergleich mit dem Wort *aufrecht* könnte helfen). Diese Bedeutung wird auch durch Vergleich der Lehnwörter *orthogonal* (=rechtwinkelig) und *orthodox* (=rechtgläubig) bestätigt. Andere Beispiele für mögliche Interferenzen bei zusammengesetzten Wörtern: Das Gegenstück zu *gewöhnliche Brüche ist* nicht *ungewöhnliche Brüche*, sondern *Dezimalbrüche*. Der Ausdruck *ebene Fläche* mag umgangssprachlich als Tautologie erscheinen, doch gibt es - wie schon erwähnt - auch *gekrümmte Flächen*.

Während nun im Fall jener Fachwörter, die in der Alltagssprache nicht auftreten, dem Lehrer wie auch den Schülern klar ist, dass im Unterricht eine neue Bedeutungsvorstellung aufzubauen ist, stellt sich die didaktische Situation im Fall der übrigen Fachtermini ganz anders dar. Kommen den Schülern Bezeichnungen, die als Fachwörter im Mathematikunterricht auftauchen, bekannt vor, d. h. verbinden sie mit ihnen bereits von ihren außerschulischen Spracherfahrungen her Bedeutungsvorstellungen, so ist ihnen vielleicht nur schwer bewusst zu machen, dass sie diesbezüglich noch Neues zu lernen haben. Sie schenken der veränderten Bedeutung zu wenig Beachtung. Der Lehrer seinerseits mag annehmen, für den Aufbau von Bedeutungsvorstellungen in diesem Fall geringere Mühe aufwenden zu müssen, weil ihm das Vorwissen der Schüler aus dem Alltag als Hilfe für die Begriffsbildung erscheint.

Nun darf aber aus der Tatsache, dass die Schüler zu Fachwörtern oder didaktischen Vokabeln außerschulische Erfahrungen mitbringen, keineswegs geschlossen werden, dass deren fachliche bzw. schulische Bedeutung etwas Selbstverständliches sei. In Wirklichkeit ist eher zu erwarten, dass die Alltagsvorstellungen der Schüler die Begriffsbedeutungen, die der Mathematiklehrer den bekannten Wörtern zuschreibt oder zugeordnet wissen möchte bzw. zu vermitteln versucht, störend überlagern und deren korrekte Auffassung erschweren. Diese Überlagerungen lassen sich recht treffend mit dem physikalischen Bild der Interferenz charakterisieren (dort gebraucht, um Überlagerung von Wellen oder Schwingungen zu beschreiben). Beispielsweise bereitete es in einer 8. Realschulklasse den Schülern große Schwierigkeiten, die Definition des Lehrers für den Begriff PASSANTE als Gerade, deren Schnittmenge mit einer Kreislinie leer ist, zu verstehen (Interferenz mit der alltagssprachlichen Bedeutung von *Schnitt*). In einer fünften Hauptschulklasse weigerte sich ein Schüler zu Recht, das Eineinhalbfache einer Kreisfläche als *Bruchteil* zu bezeichnen. In einer siebten Hauptschulklasse wollten die Schülern nicht akzeptieren, dass beide parallelen Linien eines Trapezes (auch die 'obere') als *Grundlinien* bezeichnet wurden.

Um solche Interferenzen zu vermeiden, müssen die Schüler die modifizierte oder andersartige Bedeutung, die einem Fachwort im Unterricht zugeschrieben wird, von ihrem bisherigen Sinnverständnis absetzen und unterscheiden lernen. Man darf wohl davon ausgehen, dass dies um so schwieriger ist, je näher alltagssprachliche und fachliche Bedeutung beieinander liegen; d. h. mit der Distanz der Bedeutungen dürfte die schädliche Wirkung solcher Überlagerungen eher abnehmen.

c) Bedeutungswechsel von Bezeichnungen und Symbolen

Der Mathematik wird eine außergewöhnliche Klarheit der Begriffsbildung zugeschrieben. In der Tat versucht die wissenschaftliche Mathematik, vor allem im Rahmen einer axiomatisch-deduktiven Entwicklung von Theorien, Begriff um Begriff unter Verwendung weniger, als unerklärt vorausgesetzter oder bereits vorausgehend definierter Termini nach Inhalt und Umfang endgültig und vollständig zu beschreiben; es wird eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Bezeichnungen (Termini oder Symbolen) und Bedeutungen hergestellt. Der Begriff wird determiniert. Häufig wird freilich übersehen, dass diese strenge Form der Eindeutigkeit nur im Rahmen einer spezifischen Theoriedarstellung, also gleichsam nur kontextbezogen gilt. In verschiedenen Darstellungen können der gleiche Terminus bzw. das gleiche Symbol in durchaus unterschiedlicher Bedeutung gebraucht werden; umgekehrt kann ein und dieselbe Bedeutung in verschiedenen Theoriedarstellungen mit unterschiedlichen Bezeichnungen belegt sein. Wie im ersten Kapitel beschrieben, gibt es auch in der Mathematik Polysemien und synonymen Bezeichnungsgebrauch und damit Abweichungen von der Eindeutigkeit, wie man sie auch aus anderen Wissensbereichen kennt (gemildert oder erschwert durch eine nicht unbeträchtliche Zahl von Zeichen und Symbolen, denen weltweit die gleiche Bedeutung zugewiesen wird).

Im Schulunterricht, wo eine axiomatisch-deduktive Theorieentwicklung nur ansatzweise möglich, generell jedoch nicht üblich (und vermutlich auch nicht sinnvoll) ist, kommen sehr viele Abweichungen von der Eindeutigkeit des Begriffsgebrauchs vor, die aber nicht explizit durch einen Kontextwechsel motiviert werden und daher den Schülern oft das Sprachverstehen erschweren. So etwa,

- wenn das Wort *Dreieck* einmal auf eine Fläche, ein anderes mal auf einen Streckenzug angewendet wird (entsprechend andere Bezeichnungen für ebene geometrische Figuren);
- wenn, wie auf der oben abgedruckten Schulbuchseite, *Winkel* einerseits als System von zwei Halbgeraden, andererseits als Flächenstück (Winkelfeld) erklärt und eine Seite später auch noch für das Drehungsmaß verwendet wird;
- wenn man mit *Würfel* manchmal eine dreidimensionale Punktmenge (einen Vollkörper), manchmal ein System von Flächen bezeichnet (entsprechend bei anderen Bezeichnungen für geometrische Körper);
- wenn das Wort *Durchmesser* einerseits eine Kreissehne, auf welcher der Mittelpunkt liegt, also ein geometrisches Objekt, andererseits – oft innerhalb des gleichen Kontexts – die Länge dieser Sehne, also eine geometrische Größe bezeichnet (Entsprechendes gilt für Termini wie *Radius*, *Höhe*, *Seite*, *Winkel*, *Fläche*, *Oberfläche* und zugehörige Abkürzungen wie r, h, a, A, α);
- wenn gleiche Buchstaben bzw. Symbole als Bezeichnungen für bestimmte mathematische Objekte (als Konstanten) und als Platzhalter für eine Menge von Objekten (als Variablen) benutzt werden, vor allem im Geometrieunterricht.

Dies alles waren Beispiele für Polysemien bzw. für homonymen Begriffsgebrauch. Analoge Schwierigkeiten können aus synonymer Verwendung von Bezeichnungen erwachsen. So nennen bzw. bezeichnen Lehrer und Schulbuchwerke

– den gleichen Typ geometrischer Figuren *n-Eck* oder *Vieleck*, manchmal auch *Polygon (*ein Wort, das allerdings zumeist in etwas allgemeinerer Bedeutung gebraucht wird);
– gleiche oder nahezu gleich mathematische Objekte *Funktion*, *Abbildung* und *Zuordnung*, eine *Zuordnungsvorschrift* an anderer Stelle *Operator* oder eine Gleichung mit zwei oder mehr Variablen in bestimmten Zusammenhängen *Funktionsgleichung*;
– das *Kommutativgesetz* zuerst *Vertauschungsgesetz* (entsprechend das *Assoziativgesetz* zuerst *Verbindungsgesetz* und das *Distributivgesetz* zuerst *Verteilungsgesetz*);
– den gleichen Winkel zuerst mit $\angle(g,h)$ und kurz darauf mit α (wie auf der oben abgedruckten Seite).

Zum Problem des Gebrauch verschiedener Bezeichnungen mit gleicher Bedeutung siehe auch DALES & CUEVAS (1987).

Die Ergebnisse der Studie von DURKIN u. a. (1990), über die oben berichtet wurde, lassen sich wohl auf das Problem der Polysemie zurückführen. Freilich ist das spezielle Beispiel der in diesem Projekt untersuchten Polysemie für den Bereich der deutschen Sprache deshalb weniger bedeutsam, weil hier in Verbindung mit Zahlen anstelle von *höher* bzw. *niedriger* eher von *größer* bzw. *kleiner* gesprochen wird und anstelle von *hoch* oder *niedrig* eher von *groß* oder *klein*. Dennoch mag der Befund vielleicht ein Licht auf die Schwierigkeiten werfen, die zumindest jüngere Kinder mit Polysemien haben können. Als weiterer Gesichtspunkt könnte hier die unvollständige Abgrenzung zwischen Sprache und Metasprache genannt werden. Die Aussage $3 < 5$ ist (auf Zahlen bezogen) mathematisch korrekt, aber die Aussage *diese* 3 *ist größer als jene* 5 ... ist auf die Ziffern bezogen korrekt.

Wenn die Ursachen für Schwierigkeiten der Schüler mit dem Verstehen und dem Gebrauch mathematischer Sprachmittel im Unterricht in der zu großen Anzahl fachlicher Bezeichnungen und Symbole, in Interferenzen zwischen fachlicher und alltagssprachlicher Bedeutungen von Wörtern und im Bedeutungswechsel von Bezeichnungen und Symbolen liegen, so muss nach unterrichtspraktischen Konsequenzen gefragt werden. Welche Grundsätze lassen sich formulieren?

– Zum ersten sollte der Lehrer mit der Einführung neuer fachlicher Termini und Symbole größtmögliche Zurückhaltung üben. Diese Sprachmittel dürfen nicht zu einem selbständigen Lehrinhalt des Mathematikunterrichts werden. Vielmehr sind sie funktional zu sehen und einzusetzen. In der Mathematik selbst werden Bezeichnungen und Symbole als Mittel zum Zweck der Darstellung von Lehrsätzen und deren Beweise betrachtet; sie sind Instrument, nicht ein Gegenstand der Theoriebildung. Andererseits wären das Verständnis und die Verwendung mathematischen Wissens vielfach ohne Verwendung und Kenntnis gewisser fachsprachlicher Mittel sehr erschwert, in manchen Fällen sogar unmöglich. Gleichwohl sollte sich der Unterricht auf jene beschränken, die im Interesse einer vereinfachten und klaren Darstellung des jeweils behandelnden mathematischen Sachverhalts notwendig erscheinen. Nicht dringend benötigten Bezeichnungen und Symbole könnten allenfalls als Angebote in dem Sinne präsentiert werden, dass es den Schülern überlassen bleibt, sie in ihren Sprachprodukten zu verwenden oder nicht. Ein wichtiges Lehrziel ist es aber, Schüler die Vorteile einer sachgerechten Fachsprache erfahrbar zu machen.

  Das Gebot der Zurückhaltung im Einsatz von fachsprachlichen Mitteln gilt in verstärktem Maße für die Unterrichtsmedien. Der Lehrer sollte nicht gezwungen werden, gegen seine didaktische Überzeugung mathematische Termini oder Symbole einzuführen, nur damit die Schüler Texte eines Schulbuchs oder von Arbeitsblättern verstehen können. Schließlich ist zu betonen, dass auch didaktische Bezeichnungen und Symbole für die Schüler „fremdsprachliche Mittel“ darstellen, und dass daher deren Umfang in gleicher Weise auf das unbedingt nötige Maß beschränkt bleiben muss.
– Das Problem der Bedeutungsinterferenzen lässt sich nicht dadurch lösen, dass der Lehrer gleichsam versucht, den Schülern alltagsweltliche Vorstellungen zu mathematischen Fachbezeichnungen auszutreiben und durch

mathematische Bedeutungsvorstellungen zu ersetzen. Erfolgversprechender ist es, die fachlichen Bedeutungen sorgfältig zu entwickeln, und zwar zunächst gesondert, und den Schülern erst anschließend die Differenz zu alltagssprachlichen Vorstellungen bewusst zu machen. In aller Regel macht es auch wenig Sinn, fachliche Bedeutungen aus alltagsweltlichen heraus entwickeln zu wollen.

Wichtig erscheint, dass die Schüler von Anfang an die Kontextabhängigkeit von Wort- und Symbolbedeutungen erfahren und ihre Bedeutungszuschreibungen kontextgebunden vorzunehmen lernen. Wörter erhalten, im Sinne des späten *Wittgenstein* ihre Bedeutung im Gebrauch (siehe BAUERSFELD 1995). Es sollte für sie zu einer festen Gewohnheit werden, beim Umgang mit fachsprachlichen Texten nach der spezifischen Bedeutung der darin enthaltenen Sprachmittel zu fragen und bei eigener Textproduktion die jeweils intendierten Bedeutungen für die Hörer bzw. Leser erkennbar zu machen. Im Alltag dürfen und sollten sie die fachlichen Bezeichnungen auch fortan im üblichen Sinn gebrauchen und verwenden. Dort würde sie mit einer Verwendung im mathematischen Sinn oft nur Missverständnissen erzeugen.

Im übrigen weist das Problem der Bedeutungsinterferenzen auch darauf hin, dass die nicht selten im Unterricht der unteren Schulstufen zu beobachtende Neigung, fachliche Bezeichnungen durch sog. ‘schülergerechtere’ (d. h. der Alltagssprache entnommene) zu ersetzen, sich als gefährlich erweisen kann. Denn für diese Wörter ist in jedem Fall die Gefahr groß, dass sich Bedeutungsinterferenzen einstellen.

– Dem Problem der Polysemie versuchen manchen Lehrer und Lehrmittel dadurch zu begegnen, dass sie durch Einführung zusätzlicher Bezeichnungen eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen Wörtern bzw. Symbolen einerseits und Bedeutungen anderseits herzustellen versuchen. Es wird dann unterschieden zwischen *Kreis* und *Kreislinie*, *Mittelpunktslinie* und *Durchmesser* (als Größe), *Winkel* und *Winkelmaß* bzw. *Winkelgröße* usw. Ein solcher Versuch ist dazu angetan, die Anzahl der einzuführenden Fachwörter zu vermehren und erhöht damit den unerwünschten „Fremdspracheneffekt“. Zum zweiten kompliziert er die Sprache und macht sie schwerfällig. Er provoziert ständige Ermahnungen der Schüler zu „korrektem Sprechen“. Angemessener erscheint es zu sein, das für jede Sprache geltende Prinzip, dass die Bedeutung von Wörtern im Gebrauch festgelegt wird, auch für mathematische Sprachäußerungen und Texte anzuerkennen. Polysemien bleiben zugelassen und die Schüler müssen lernen, adäquate Bedeutungen aus dem Kontext zu entnehmen bzw. kontextspezifisch festzuschreiben.
– Leichter vermeidbar sind Synonymien. Wenn der Lehrer davon absieht, für gleiche Begriffe oder begriffliche Ideen unterschiedliche Bezeichnungen einzuführen, so kann dadurch der Blick auf manche mathematische Zusammenhänge geöffnet und zugleich der Umfang der einzuführenden Fachterminologie reduziert werden.

3.1.2 Verstehen und Formulieren fachlicher Sätze und Texte

Wie im Abschnitt 1.3 gezeigt, unterscheiden sich Alltagssprache und Fachsprache nicht nur im Bereich eines verschiedenartigen oder in anderer Bedeutung gebrauchten Vokabulars sowie der Verwendung von abkürzenden Symbolen. Weitere Unterschiede liegen im Hervorbringen und Interpretieren von Aussagen bzw. in der Struktur der Satzbildung. Auch solche Merkmale des mathematischen Registers kommen in der Unterrichtskommunikation zum Tragen und können einen weiteren Grund für Schwierigkeiten von Schülern beim Verstehen und Formulieren fachlicher Sätze und Texte sein.

a) Gebrauch von Quantoren

In der oben abgedruckten Schulbuchseite liest man z. B. in Zeile 3/4: "Gehen von einem Punkt S (genannt Scheitel) zwei Halbgeraden g und h (genannt Schenkel) aus, so erzeugen g und h einen Winkel $\angle$ (g, h)." Fünf Zeilen weiter erfahren die Schüler dann, vielleicht mit Erstaunen: "Zu den Schenkeln g und h gehören zwei verschiedene Winkel $\alpha \neq$ ß, die wir durch verschiedene Winkelbogen unterscheiden." Geht ein Schüler mit seinem vom

Alltag her geprägten Sprachverständnis an diesen Text heran, wird er die beiden Sätze vielleicht für widersprüchlich halten und sich verwirrt fragen: Bilden g und h nun einen Winkel oder zwei? Der Buchautor indes kann für sich ins Feld führen, nach mathematisch üblicher Sprachauffassung korrekt formuliert zu haben. Schließt doch ihr zufolge die Aussage "g und h schließen einen Winkel ein" keineswegs aus, dass die beiden Geraden auch weitere Winkel bilden. Um dies auszuschließen hätte er mathematisch formulieren müssen *g und h bilden einen und nur einen Winkel* oder *g und h bilden genau einen Winkel*.

In der Alltagssprache werden der unbestimmte Artikel und das Zahlwort *ein* miteinander vermengt – was auf Grund der sprachlichen Gestalt und der Herkunft des unbestimmten Artikels als eine Abschwächung des Zahlwortes *eins* verständlich ist – und der Existenzquantor in einer Weise gedeutet, die in der Fachsprache mit dem Ausdruck *ein und nur ein* oder *genau ein* präzisiert werden muss. Daher würde man den Satz *In der Tüte gibt es einen Apfel* als Lüge empfinden, wenn sich tatsächlich fünf Äpfel in der Tüte befinden. Es kommt dabei auch eine grammatikalische Besonderheit indo-europäischer Sprachen zum Vorschein: Bei zählbaren Objekten wird der Plural verwendet, wenn von mehr als einem Objekt die Rede ist. (Fragt man allerdings *Hast du einen Apfel?*, so bedeutet auch in der Umgangssprache der unbestimmte Artikel *mindestens einen*.)

Gehen Schüler nun mit ihrer alltäglich geprägten Sprachauffassung an Lehrer- und Medientexte heran, die bezüglich des Existenzquantors dem mathematischen Register folgen, so kann es zu Verstehensschwierigkeiten kommen. Sie werden zum einen verwundert sein über Sätze wie *Auf einer Geraden gibt es zwei (verschiedene) Punkte. Zwei sich schneidende Geraden liegen in einer Ebene. Zwischen zwei Bruchzahlen liegt stets eine dritte. Ein Punkt P einer Menge M heißt innerer Punkt von M, wenn es eine Umgebung U von P gibt, die ganz zu M gehört*, wenn sie den Existenzquantor als Zahlwort interpretieren. Zum anderen wird ihnen aus gleichem Grund eine präzisierende Beschreibung mit *genau ein* oder *ein und nur ein* als unnötig oder überflüssig erscheinen, weil sich das hier Gemeinte in der Alltagssprache mit dem Wort *ein* allein schon ausgedrückt ist.

PIMM (1987) verweist auf die Untersuchungen von *Tall* zum Gebrauch der Wörter *some*, *all* und *any* durch Schulanfänger. Sie kam zu dem Ergebnis, dass für viele Schüler die Wörter *some* und *all* eher gegensätzliche als einschließende Bedeutung haben, d. h. *all* schließt für sie *some* nicht mit ein. Der in der Mathematik übliche Gebrauch von *any* im Sinne von *every* steht ebenfalls im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch. Ähnliche Unterschiede dürften sich auch beim Gebrauch der entsprechenden deutschen Wörter (einige, alle, jeder) zeigen.

BOSCHET (1987) untersuchte die Verwendung des Existenzquantors durch Lernende in verschiedenen Aufgabenzusammenhängen. So wurden im Anschluss an eine kurze Behandlung beschränkt wachsender Folgen 71 Universitätsstudenten der Mathematik im ersten Semester folgende Aufgaben vorgelegt:

f sei eine auf R stetige und differenzierbare Funktion und die Ableitung f´ sei streng monoton fallend.

a) Zeigen Sie, dass für jedes x gilt: $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$

b) Leiten Sie daraus ab, dass gilt: Wenn f (x) für x gegen $+\infty$ einen Grenzwert hat, dann geht f´ (x) gegen Null.

48 Studierende formulierten bei a) den Existenzquantor auf drei verschiedene Weisen: In natürlicher Sprache wie „es gibt ein $c \in$...“ (6%), mit Hilfe des üblichen Symbols als $\exists\, c \in$ (23%) oder in der Form $f(x + 1) - f(x) = (x + 1 - x) f'(c)$ mit $x < c < x + 1$, also mit Hilfe der Präposition *mit* (21%). Alle übrigen ließen den Existenzquantor weg. Bei der Teilaufgabe b) machten 33% der Schüler den Fehler, die Ungleichungen beim Grenzübergang unverändert zu lassen. 14% explizierten den Quantor und 56% erwähnten ihn überhaupt nicht. Eine Studie mit einer anderen Untersuchungsgruppe von 102 Studierenden im gleichen Semester, der ebenfalls Aufgaben zu den beschränkt wachsenden Folgen vorgelegt wurden, führte zu vergleichbaren Ergebnissen. Insgesamt wurden die Aufgaben von den Studierenden, die Quantoren explizierten, die Aufgaben nur geringfügig besser gelöst. Die Lösungen waren allerdings bei diesen Studierenden beweiskräftiger, und sie machten weniger Fehler.

Bei einer weiteren Untersuchung mit Aufgaben zu parametrisch gegebenen Kurven zeigte sich, dass die Schüler offenbar im Fall algorithmischer Aufgaben weniger dazu neigen, Quantoren zu explizieren. Bei diesen Aufgaben wurden zwar von mehr als der Hälfte der Schüler die Existenzquantoren expliziert, und dies nahezu ausnahmslos in natürlicher Sprache, jedoch zumeist in Verbindung mit einer graphischen Aufgabenlösung, also im Kontext einer nicht-algorithmischen Vorgehensweise.

Schwierigkeiten kann auch der Gebrauch des Allquantors bereiteten. Nach fachsprachlichen Grundsätzen ist zu fordern, dass dieser in Allaussagen expliziert und seine Geltung auf definierte Mengen bezogen wird. Beispiel: *Eine Punktmenge (Fläche) M heißt konvex, wenn für alle Punktepaare P, Q* $\in$ *M die Verbindungsstrecke* [*PQ*] *ganz in M liegt.* Aufgrund ihrer alltagsweltlichen Sprachgewohnheiten neigen die Schüler dazu, dem Allquantor einfach auszuweichen bzw. ihn nur implizit mitzudenken. Damit bleibt der Geltungsbereich der Aussage für den Hörer bzw. Leser ungeklärt bzw. unbestimmt. Auch in Medien findet man nicht selten Sätze, bei denen die Explikation des Allquantors und die Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs fehlen. Beispielsweise werden Rechengesetze nahezu immer ohne Allquantor notiert. Es müssen also nicht nur die Schüler sondern auch die Lehrer und die Medien lernen, ihre allgemeingültigen Aussagen mit dem Allquantor zu verbinden und mit dessen Anwendung Geltungsbereiche genau festzulegen.

b) Gebrauch von Junktoren

Ähnliche Schwierigkeiten wie aus dem unterschiedlichen Gebrauch von Quantoren in Fach- und Alltagssprache, können den Schülern auch aus entsprechenden Differenzen beim Gebrauch von Junktoren erwachsen. Es wurde im Abschnitt Fachwörter und fachliche Symbole gezeigt, dass die Verwendung der wichtigsten additiven Konjunktion *und* in der Alltagssprache nur dann einigermaßen der logischen Verwendung entspricht, wenn vollständige Sätze mit ihr verbunden werden. Im Fall der wichtigsten disjunktiven Konjunktion *oder* ist zunächst zu unterscheiden zwischen dem ausschließenden (verstärkt *entweder ... oder* bzw. bei Verneinung *weder ... noch*) und dem nicht ausschließenden Gebrauch, der der logischen Verknüpfung der Disjunktion entspricht. *Oder* kann auch aus der Koordinierung zweier mit *und* verbundenen Sätze entstehen. Die Konjunktionen *und* bzw. *oder* können austauschbar sein, insbesondere wenn sie an verschiedenen Stellen des Satzes auftreten. Auch die komplexen Probleme der Negation wurden eingehend erörtert.

Schülern sollte der Bedeutungsunterschied der nachfolgenden drei Sätze klar sein: *Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für seine Seitenlängen der Pythagoräische Lehrsatz. – Nur wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, gilt für seine Seitenlängen der Pythagoräische Lehrsatz. – Dann und nur dann, wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, gilt für seine Seitenlängen der Pythagoräische Lehrsatz.* Man hat zwei Aussagen α = *Das Dreieck ist rechtwinklig* und β = *Es gilt der Pythagoräische Lehrsatz.* Die genannten drei Sätze haben die logische unterschiedliche Gestalt: $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$ und $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Da man in der Alltagssprache solche Unterschiede jedoch oft nicht wahrnimmt, müssen die Schüler erst für sie sensibel gemacht werden.

Vor allem gilt es, der in der Alltagssprache üblichen Verwechslung der Implikation mit der Äquivalenz entgegenzuwirken. Die Schüler müssen lernen, Satzpaare folgender Art als verschieden und daher als getrennt beweisbedürftig anzusehen:

- *Die Verbindungsstrecken zwischen (von A und B verschiedenen) Punkten eines Halbkreises über einer Strecke* [*AB*] *schließen einen Winkel von 90° ein.* bzw. *Alle Punkte, deren Verbindungsstrecken mit zwei Punkten A und B einen 90°-Winkel einschließen, liegen auf einem Halbkreis über der Strecke AB.*
- *Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.* bzw. *Ist eine Zahl durch 3 teilbar, so ist auch ihre Quersumme durch 3 teilbar.*

– *Für rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen x und. y und Hypotenusenlänge z gilt:* $x^2 + y^2 = z^2$ (Lehrsatz des Pythagoras) bzw. *Gilt in einem Dreieck mit den Seitenlängen x, y und z die Beziehung* $x^2 + y^2 = z^2$*, so ist dieses Dreieck rechtwinklig* (Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras).

Wie im genannten Abschnitt besprochen, wird eben in der Alltagssprache die Implikation *wenn...dann* für gewöhnlich als Äquivalenz gedeutet. Aus einer Behauptung wie *Wenn es regnet, geht Maria ins Kino* pflegt man hier zu schließen, dass Maria nicht ins Kino geht, wenn die Sonne scheint. Oft wird gesagt, dass hier ein Fehlschluss vorliege. Korrekter aber ist es, festzuhalten, dass in der Umgangssprache eben die Fügung *wenn ... dann* sowohl für die Implikation als auch für die Äquivalenz stehen kann. Andererseits verleitet diese Sprachgewohnheit Schüler oft dazu, Fehler zu machen. Beispielsweise verleitet die Definition *Das Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm hat den Flächeninhalt 1* cm^2 gemäß alltäglichem Sprachverständnis zu dem Umkehrschluss *Der Flächeninhalt 1* cm^2 *ist (nur) als Flächeninhalt eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 1 cm darstellbar*.

Wenn zu einem Satz auch der Umkehrsatz wahr ist, also in der Tat eine Äquivalenz der Aussagen vorliegt, pflegt man dies in der mathematischen Fachsprache mit der, für alltagssprachlich geschulte Ohren überflüssig kompliziert klingenden Wendung *genau dann..., wenn...* oder *dann und nur dann..., wenn...* auszudrücken. Beispiel: *Ein Viereck ist genau dann (dann und nur dann) ein Parallelogramm, wenn sich seine Diagonalen halbieren.* Die Bedeutung einer solchen Präzisierung ist Schülern oft schwer verständlich.

HENNES & SCHMIDT (1982) führten diesbezüglich eine Studie mit Hauptschülern der 10. Klasse durch. Die Schüler sollten von einer Sammlung von Brüchen, deren Dezimalbruchentwicklung bereits bestimmt war, (hinreichende) Bedingungen dafür nennen, dass zu einem Bruch ein abbrechender Dezimalbruch gehört. Eine typische Schülerantwort: „Ich habe hier Beispiele, da kann ich immer den Nenner durch 2 teilen, und dabei kommt immer eine endliche Zahl raus.“ Dazu eine ebenso typische „Widerlegung“ durch einen anderen Schüler: „Z. B. bei 3/5; 5 ist nicht durch zwei teilbar und die Dezimalzahl auch endlich.“ Die Argumentation dieses Schülers lässt sich logisch folgendermaßen rekonstruieren: Er interpretiert $\alpha(a) \to \beta(a)$ irrigerweise als $\alpha(a) \leftrightarrow \beta(a)$ d. h. es gilt insbesondere $\beta(a) \to \alpha(a)$; dann ist 3/5 ein Gegenbeispiel. Mit anderen Worten: Auch hier wird die Implikation als Äquivalenz aufgefasst. Diese Art der Deutung illustrieren die Verfasser durch eine Reihe weiterer Beispiele. Schließlich wurde den Schülern zu dieser Problematik ein Aufgabenbogen mit einer neunteiligen Aufgabe zum logischen Schließen vorgelegt, wo die Schüler für gegebene Sätze aus dem Alltag mit schlussfolgerndem Inhalt beurteilen sollten, ob sie wahr oder falsch sind. Die Erfolgsquoten unterschieden sich für verschiedene Klassen sehr stark und lagen insgesamt zwischen 22% und 70%.

Neben Quantoren und Junktoren werden auch manche Präpositionen in Fach- und Alltagssprache unterschiedlich verwendet. Auch aus solchen Differenzen kann Missverstehen resultieren. Nach alltäglichem Verständnis ist z. B. die Frage *Zwischen welchen Zahlen liegt 8?* nur zu beantworten mit *zwischen 7 und 9* und nicht etwa mit *zwischen 3 und 21*, was mathematisch ebenfalls richtig ist. Manchmal wird ein gewisses Vorwissen durch die Art der Frage ausgedrückt. Die Frage *Welche Zahlen liegen zwischen 5 und 9*? impliziert das Vorwissen, dass es mehrere Zahlen dieser Art gibt. Die Frage *Welche Zahl liegt zwischen 5 und 9*? Legt nahe, dass es nur eine Zahl dieser Art gibt.

c) Begriffliche Konsistenz

Beim Formulieren mathematischer Sätze und Text sollten die Schüler (natürlich auch der Lehrer und die Medien) darauf achten, dass die in ihnen verwendeten Fachausdrücke in Definitionen folgerichtig und widerspruchsfrei verwendet werden. Man kann dies als begriffliche Konsistenz bezeichnen und im Einzelnen so definieren:

– In einem Text werden die verwendeten (fachlichen) Bezeichnungen und Symbole stets mit gleichen Bedeutungen verknüpft (Vermeidung von Polysemien). Falls einer Bezeichnung oder einem Symbol aus zwingenden Gründen doch unterschiedliche Bedeutungen zugewiesen werden sollen, wird die Polysemie bzw. der Bedeutungswechsel expliziert.

- In einem Text werden gleiche Bedeutungen stets mit gleichen Bezeichnung bzw. Symbolen dargestellt (Vermeidung von Synonymie). Falls einer Bedeutung oder einem Symbol aus zwingenden Gründen doch unterschiedlich bezeichnet bzw. symbolisiert werden soll, wird die Synonymie bzw. der Bezeichnungswechsel expliziert.
- In den mathematischen Aussagen eines Texts muss jeweils das Prädikat der vereinbarten oder fachlich üblichen (konventionellen) Begriffsbedeutung des Subjekts angemessen sein und umgekehrt. Beispielsweise kann ein Mathematiker mit der Aufforderung *Verdopple diese Menge!* wenig anfangen. Das Wort *Menge* wird in der Mathematik verwendet, um eine Auswahl von Objekten aus einem vorgegebenen Objektbereich gemäß einem vorgegebenen Kriterium zu bezeichnen. Vielleicht ist gemeint: *Gib eine Menge an, die doppelt so viele Elemente wie diese Menge hat*.

Den Forderungen nach Konsistenz und der Determinierung von Begriffen (siehe den Abschnitt Zur sprachlichen Gestalt der Mathematik) gerecht zu werden, fällt nicht nur den Schülern schwer. Gleichwohl sind beim Sprechen und Schreiben über mathematische Sachverhalte nicht nur präzise Begriffsbestimmungen wichtig und notwendig, sondern auch eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Zeichen und Bedeutung anzustreben, wobei auf sprachästhetische Gesichtspunkte wie Abwechslung und Lebendigkeit des Ausdrucks oft verzichtet werden muss.

d) Unvollständigkeit von Texten

Lehrerinstruktionen und -erklärungen sowie Texte in Unterrichtsmedien (Aufgabentexte oder Merksätze) enthalten oft nicht alles Wissen, das ihr Verfasser übermitteln möchte oder übermitteln müsste, um einem Missverstehen vorzubeugen. In den meisten Fällen handelt es sich dabei allerdings nicht um ein Versehen oder einen Fehler; vielmehr hat die Unvollständigkeit ihren Grund darin, dass der Verfasser den Schülern ein Wissen unterstellt, das es ihnen ermöglicht oder gar nahe legt, die Lücken selbst zu füllen bzw. das fehlende Wissen zu ergänzen. Die oben abgedruckte Schulbuchseite liefert auch dafür gute Beispiele:

- Gemäß der anfangs gegebenen Definition werden Winkel durch zwei Halbgeraden gebildet, die von einem gemeinsamen Anfangspunkt S ausgehen. In den Aufgaben, welche die Schüler im unmittelbaren Anschluss daran und auch auf den folgenden Seiten zu lösen haben, hat man es aber auch mit Winkeln zwischen zwei sich schneidenden Geraden, zwischen einer Geraden und einer auf dieser beginnenden Halbgeraden oder zwischen zwei Seiten eines Polygons zu tun. Die Definition sagt nichts darüber aus, dass der Begriff Winkel als unabhängig zu betrachten ist von der Länge der beiden Linien, von denen er gebildet wird und der Lage ihres gemeinsamen Punktes. Der Autor unterstellt, dass die Schüler fähig sind, diese Informationslücke selbst zu schließen oder derartige Verallgemeinerungen selbst nachzuvollziehen.
- In der Definition von Winkel wird von zwei Halbgeraden g und h gesprochen. Noch auf der gleichen Seite werden der Nullwinkel und der Vollwinkel in einem Bild mit nur einer Halbgeraden gezeigt, bzw. bei dem sich die beiden zusammenfallenden Halbgeraden nicht mehr unterscheiden lassen. Dieser Sonderfall ist in der Definition nicht erfasst, bzw. es wird unterstellt, dass die Schüler eine Halbgerade auch als zwei aufeinander fallende Halbgeraden zu deuten vermögen.
- Die zweite Winkeldefinition, die auf dieser Seite gegeben wird, sagt: "Manchmal nennt man auch die Punktmenge, die von den Halbgeraden eingeschlossen wird, einen Winkel oder genauer ein Winkelfeld." Streng genommen wird damit der Winkel als eine offene Punktmenge beschrieben, was sicher nicht in der Absicht des Verfassers lag. Er hätte also sagen müssen, dass die beiden Halbgeraden, welche die Punktmenge einschließen, selbst auch zum Winkel(feld) gehören sollen. Vielleicht geht er aber davon aus, dass eine offene

Punktmenge außerhalb des Vorstellungsvermögens von Schülern der 5. Jahrgangsstufe liegt, und daher von ihnen die begrenzenden Halbgeraden selbstverständlich dem Winkel zugerechnet werden.

Beispiele solcher Unvollständigkeit von Sprachäußerungen und Texten des Lehrers bzw. von Medien finden sich in großer Zahl. Ein Lehrer erklärt seinen Schülern die Regel "Zahlen werden mit 10, 100 oder 1000 multipliziert, indem man an ihre Darstellung ein, zwei oder drei Nullen anhängt." Ein Schüler, der sie dann in der 6. Klasse auf die Dezimalbrüche anwendet und $3{,}5 \cdot 10 = 3{,}50$ rechnet, stellt erstaunt fest, dass er einen Fehler gemacht haben soll. Zur Zeit der Erarbeitung und Verwendung des Merksatzes kannten eben die Schüler ("offiziell") noch gar keine Dezimalbrüche. So hielt es der Lehrer nicht für nötig, die Einschränkung auf natürliche Zahlen in seinem Merksatz zu explizieren. Sie verstand sich aus dem Kontext der vermuteten unterrichtlichen Situation von selbst und wäre von den Schülern wohl auch schwerlich verstanden worden.

Generell ist Unvollständigkeit nicht selten ein Mittel, die Komplexität von Texten zu reduzieren, indem das "Selbstverständliche" nicht ausdrücklich formuliert wird. Anderseits kann sie zu Verstehensschwierigkeiten Anlaß geben, wenn ein Schüler das zur Ergänzung der Lücken vorausgesetzte Wissen nicht besitzt oder nicht verwendet, und den unvollständigen Text so auffasst, als enthielte er das komplette Wissen.

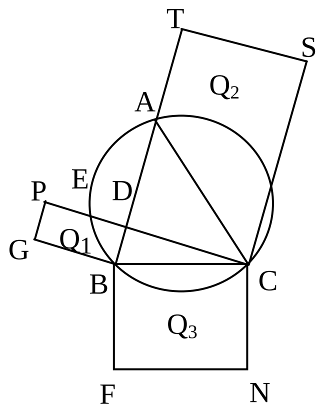
Wenn es schon Schulbuchautoren und Lehrern oft nur unvollkommen gelingt, einer berechtigten Forderung nach Vollständigkeit bei mathematischen Texten gerecht zu werden, darf sich wohl niemand wundern, dass Entsprechendes für die Textproduktion von Schülern gilt, die weit weniger Überblick über notwendige Einschränkungen und Abgrenzungen sowie unverzichtbare Wissenselemente haben.

e) Prägnanz von Texten

Die für die Mathematik typische Verwendung sprachlicher Mittel, die es erlauben, eine recht umfangreiche Information in wenigen Worten, vor allem aber in Symbolen von geringer räumlicher Ausdehnung unterzubringen, findet ihren Niederschlag auch in der Lehrer- und Mediensprache im Mathematikunterricht. In manchen Fällen kann eine prägnante Darstellung sicherlich auch das Verständnis eines Textes erleichtern. Sie kann aber, vor allem für den im Umgang mit ihr wenig geübten Schüler, auch zu einem großen Verstehenshindernis werden. Es muss ihnen ja in der Sprachwahrnehmung gelingen, den verdichteten Bedeutungsgehalt zu „entschlüsseln“ bzw. „auseinanderzufalten“ (siehe auch DALES & CUEVAS 1987). In der Sprachproduktion sollten sie nach und nach lernen, ihre Gedanken knapp und präzise darzustellen und in geeignete prägnante Sprachmittel zu verschlüsseln. Auch dies ist ungewohnt und bereitet nicht selten erhebliche Schwierigkeiten.

Es könnte vor allem die Prägnanz der mathematischen Fachsprache sein, die Schüler oftmals zu einer Art ihres Gebrauchs kommen lassen, die D’AMORE (1996) mit dem Terminus „mathematischer Jargon“ umschreibt. Als aussagekräftiges Beispiel für mathematischen Jargon zitiert er den ‘Beweis von Beluno’. Beluno war Student eines italienischen Lehrerbildungskollegs und löste im Rahmen einer schriftlichen Prüfung folgende Aufgabe: „Gegeben seien ein Kreis, eine Sehne BC und zwei Punkte A und E, die zum gleichen Bogen BC gehören. Beweise, dass die zwei Peripheriewinkel BEC und BAC zueinander kongruent sind.“ Beluno lieferte zu folgender Zeichnung einen ausführlichen Text, in dem er zunächst feststellte, dass die Strecken EC und AB sich im Punkt D schneiden, die ‘Scheitelwinkel’ BDE und ADC kongruent sind, man das Dreieck BCD betrachten und über seinen Seiten drei Quadrate bilden sollte: das Quadrat Q_1 über der Seite BD, das Quadrat Q_2 über der Seite CD und Q_3 über der Seite BC. Wörtlich schreibt dann Beluno:

“Aufgrund des Lehrsatzes von Pythagoras kann ich feststellen, dass Q_1 ist $\cong$ zu Q_2 und $Q_2 \cong Q_3$, folglich auch $Q_3 \cong Q_1$. Nachdem bewiesen ist, dass die Quadrate untereinander kongruent sind, kann ich sagen, dass die Grundlinie DB des Dreiecks DEB ähnlich ist zur Grundseite BC des Dreiecks EBC, und folglich (...) immer nach dem Lehrsatz von Pythagoras, dass BEPG und ATSC zwei kongruente Vierecke sind“ ... „Daher sind EB und AC ähnlich“...



Wie man erkennt, bedient sich der Student bei immer strenger werdendem Formalismus einer sehr gewählten mathematischen Terminologie und stellt damit verschiedenste Überlegungen an, die mit dem verlangten Beweis so gut wie nichts zu tun haben. Plötzlich erinnert er sich, über die Winkel mit den Scheiteln E und A sprechen zu müssen und erklärt, ohne jeden Zusammenhang zum vorausgehenden, dass der in der Aufgabe formulierte Satz wahr sei.

Dieser ‘Beweis’ zeigt zwei Auffälligkeiten:

– „Die verwendete Sprache in ihrem semantischen und syntaktischen Charakter: der Gebrauch von Bezeichnungen, von bekannten Lehrsätzen und eines spezifischen Symbolismus. Sie bedient sich wohlvertrauter Bezeichnungen aus der mathematischen Fachterminologie, die aber aus logischer Sicht völlig beziehungslos nebeneinander stehen oder in nur lokal korrekten, logisch unverbundenen Sätzen enthalten sind.
– Die angenommene Haltung bzw. das eingenommene Verhalten, das offensichtlich unkritisch ist und vielleicht eine vom Lehrer unbewusst, implizit übermittelte Botschaft befolgt. Jedenfalls bemühte sich der Student, so zu argumentieren, als ob es sich um einen Beweis handeln würde; er nahm sich dabei offenbar den Lehrer als Vorbild und versuchte, sich seinem Reden und Verhalten anzupassen, ohne dazu wirklich fähig zu sein“ (S. 83).

Es ist dieser Wirkungszusammenhang zwischen einem bestimmten Gebrauch der Sprache und handlungsleitenden Einstellungen, den D’AMORE „mathematischen Jargon“ nennt. „Im Grunde geschieht hier dasselbe, als wenn jemand vorgeben würde, eine fremde Sprache sprechen zu können, obgleich er nur wenige Wörter kennt (und auch diese nicht in ihrer vollen Bedeutung), und zum Beweis die Aussprache sowie typische Verhaltensmuster von native speakers nachahmt“ (S. 83). Beluno zitiert den Lehrsatz des Pythagoras, er verwendet die Bezeichnungen „Wechselwinkel“ und „ähnlich“, allerdings vollkommen bedeutungsleer. Er verwendet Symbole wie $\cong$ in undefinierbarer Bedeutung, er stellt wider jegliche Vernunft fest, dass zwei sehr verschiedene Quadrate kongruent sind. „Man kann sagen, die ‘Ingredienzien’ der Terminologie sind zwar vorhanden und ebenso das Verhalten. Was fehlt, ist der Sinn“ (S. 84).

Der mathematische Jargon tritt vor allem dann in Erscheinung, wenn Schüler veranlasst sind, Texte spontan zu formulieren und sich dabei in einigen fachlichen Schwierigkeiten befinden. Das zeigen folgende Beispiele von Lösungsprotokollen zu folgender (unlösbaren) Aufgabe: „Giovanna und Paola gehen einkaufen. Giovanna gibt 10 000 Lire aus und Paola 20 000. Wer von den beiden hat schließlich mehr Geld in der Geldbörse, Giovanna oder Paola?“

- Die 9jährige Grundschülerin Stefania schreibt:
  In Giovannas Börse bleibt mehr Geld. *30˜ 10 = 20* *10 x 10 = 100*
- Die 12-jährige Silvia aus der Scuola media notiert:
  Meiner Meinung nach hat Giovanna mehr Geld in ihre Geldbörse bekommen [Giovanna durchgestrichen und durch Paola ersetzt]*, denn Giovanna gibt 10 000 aus, während Paola 20 000 ausgibt.*

10 000	*20 000*	*20 000 – 10 000=10000 (Giovannas Geld)*
Giovanna	*Paola*	*10000 + 10000= 20000 (Paolas Geld)*

- Die 13jährige Monica schließlich meint:
  Zum Schluß hat Giovanna mehr Geld in der Geldbörse. Nach meiner Meinung gibt Giovanna weniger Geld aus, weil Paola 10 000 Lire mehr ausgibt.
  Aber ich kann es von mir aus nicht genau beantworten, weil nicht angegeben ist, wieviel Geld in der Börse bleibt.

Wie man sieht, kann nicht einmal die Einsicht in die Unlösbarkeit der Aufgabe Monica davon abhalten, einen rechnerischen Formalismus abzuarbeiten (20 000 – 10 000 = 10 000), zu dem eine Textaufgabe zu verpflichten scheint.

Die Prägnanz mathematischer Texte wird vor allem durch den Gebrauch algebraischer Symbole verschärft. Sie stellen für die Schüler einen besonderen Problembereich dar.

MACGREGOR (1992) untersuchte, welche Bedeutungsvorstellungen Schüler aus 18 Klassen der Sekundarstufe mit einfachen Gleichungssymbolen verbinden. So wurden den Schülern zu der Aufgabe *a und b sollen Zahlen sein; a ist gleich 18 plus b* vier Feststellungen zur Auswahl angeboten: $a > b$; $b > a$; *man kann nicht entscheiden, welche Zahl größer ist*; $a = 28$. Die korrekte Antwort fanden zwischen 64% der Schüler von 7. Jahrgangsstufen und 76% der Schüler von achten Jahrgangsstufen (Die Schüler der 9. und 10. Klassen lagen dazwischen). Bezüglich der Aufgabe *Ich habe m Dollar und du hast k Dollar; ich habe 6 Dollar mehr als du* sollten die Schüler eine der folgenden Gleichungen als passende Algebraisierung auswählen: $6\,k = m$, $6\,m – k$, $k + 6 = m$, $m + 6 = k$, $6 – m = k$. Hier schwankte der Anteil der korrekten Antworten zwischen 39% bei den Schülern der 7. Klassen und 53% bei denen der 8. Klassen. Deutlich größere Schwierigkeiten bereiteten den Schülern Aufgaben, bei denen zu einem Text eine Gleichung aufzustellen war. So fanden zu dem Text *s ist 8 mehr als t* nur 29% der Schüler der 11. Klasse und 27% der Schüler der 9. Klasse eine korrekte Gleichung. Im Fall des Textes *Die Zahl y ist achtmal so groß wie die Zahl z?* lag der Erfolg für die Schüler der 9. Klassen bei 35% und bei denen der 11. Klassen bei 58%. Die Verfasserin kommt aufgrund dieser Daten zu dem Schluss, dass die meisten Schüler der Sekundarstufe vornehmlich eigene, intuitive Bedeutungsvorstellungen produzieren und weniger die im Unterricht vorgestellten Modelle (Operatoren, Waage, Sachaufgaben, Zuordnungsmaschinen) verwendet.

3.2 Erarbeitender Unterricht

Zahlreiche Projekte der Unterrichtsforschung kommen zu dem Ergebnis, dass in allen Schulstufen und Schularten das Klassengespräch als Unterrichtsform dominiert. LUKESCH & KISCHKEL (1987) fassen in einem Übersichtsartikel über empirische Arbeiten zur Verteilung der Sozialformen in der Unterrichtspraxis die wichtigsten Befunde folgendermaßen zusammen (in Klammern das jeweilige Untersuchungsjahr:)

- 80 beobachtete Unterrichtseinheiten enthielten nahezu ohne Ausnahme nur Frontalunterricht.
- In einer systematischen Beobachtung von Unterrichtsstunden in den Klassenstufen 1, 3, 4, 5 und 6, die sich jeweils über 6 Schultage erstreckte, fand man folgende Verteilung der Unterrichtszeit: 60,2% Lehrerdarbietung, fragend-entwickelnder Unterricht oder kollektives Klassengespräch, 16,2% Partnerarbeit, 13% Einzelarbeit und 0,6% Gruppenarbeit.

- Unter 90 Unterrichtsstunden in einer 4. Grundschulklasse gab es nicht ein einziges Beispiel von Gruppenarbeit; weitaus dominierend war der fragend-entwickelnde Unterricht.
- 96 Unterrichtsstunden in einer 6. Klasse zu verschiedenen Fächern zeigten zu 87% Frontalunterricht, aber nicht mehr als 4% Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit.
- in 13 Klassen der Stufen 5 und 6 waren durchschnittlich von jeweils 100 Unterrichtsminuten 80,6 Minuten dem Frontalunterricht gewidmet, 3,9 Minuten der Gruppenarbeit und 9,4 Minuten der Individualarbeit.

In einer eigenen Untersuchung wollten LUKESCH & KISCHKEL (1987) die Aktualität dieser Befunde prüfen und herausfinden, ob etwa jüngere Lehrer eher schüler- und dialogorientierte Lehrstile bevorzugen. Sie baten 139 Studierende verschiedener Lehrämter ihre Erfahrungen mit Lehrformen in der Kollegstufe des Gymnasiums in den Fächern Deutsch, Englisch, Mathematik und Physik retrospektiv einzuschätzen. Doch schrieben auch diese Versuchspersonen mindestens drei Viertel des von ihnen erlebten Unterrichts einem Lehrstil zu, in dem der Lehrer alles selbst gestaltete oder zumindest intensiv leitete. So kamen die Autoren zu der Einschätzung, dass sich innerhalb von 15 Jahren seit einer Untersuchung von *Nickel* und *Dunke* an der sozialen Organisation des Unterrichts kaum etwas geändert hat. Auch neuere Lernformen wie programmierte Unterweisung bzw. Arbeit mit Lernprogrammen, offener Unterricht und Projektarbeit, Team-Teaching, u. ä. wurde kaum angetroffen.

HOPF (1980) hatte 417 Gymnasiasten des Bundesgebiets und Westberlins zu ihren Erfahrungen über Unterrichtsformen im Fach Mathematik befragt. Auch hier zeigte sich eine erdrückende Vorherrschaft des Frontalunterrichts, vor allem des fragend-entwickelnden Unterrichts. Dabei scheint es sich nicht nur um ein fächerübergreifendes, sondern auch um ein internationales Phänomen des Unterrichts zu handeln, wie z.B. die Monographie von MEHAN (1979) über Unterrichtsanalyse und die Arbeit von BOUCHARD (1982) über die Kommunikation im Mathematikunterricht vermuten lassen.

MAIER (1995) überzeugte sich in seinem VIMU-Projekt bei der Analyse zahlreicher Unterrichtsdokumente von der Vorherrschaft des „gemeinsam erarbeitenden Mathematikunterrichts“ auf allen Schulstufen und in allen Schularten. Besonders bemerkenswert erscheint ihm, dass die Erarbeitung ungeachtet der spezifischen unterrichtlichen Aufgabe als Interaktionsform gewählt wird. So tritt sie gleichermaßen in Situationen einer heuristischen Problemlösung wie in Verbindung mit dem Aufbau von Begriffen sowie der Erarbeitung eines anderen mathematischen Wissens auf. Sogar dort, wo die Schüler konventionelle Bezeichnungen, also festgelegte Bedeutungen von Namen oder Symbolen kennenlernen bzw. rekonstruieren sollten, wird erarbeitend unterrichtet.

Eine eindrucksvolle Bestätigung für die Vorherrschaft des fragend-entwickelnden Unterrichts liefert auch die Third International Mathematics and Science Study - TIMSS (siehe BAUMERT & LEHMANN 1997). Sie findet bei der Untersuchung des Mathematikunterrichts länderspezifische Unterrichtsformen, die, unterschiedlichen „kulturellen Skripten“ folgend, aus verschiedenen Abfolgen von ‘Modulen’ komponiert werden; er spricht in diesem Zusammenhang von „modalen Formen des Mathematikunterrichts“. Für Deutschland heißt es:

> „In Deutschland lassen sich zwei Varianten des modalen Mathematikunterrichts unterscheiden: Die Stunde beginnt mit der Durchsicht und Besprechung der Hausarbeiten. Es folgt eine kurze Wiederholungsphase. 1. Variante: Der neue mathematische Stoff wird im fragend-entwicklenden Unterrichtsgespräch, das auf eine einzige Lösung hinführt, relativ kurzschrittig erarbeitet und vom Lehrer an der Tafel dokumentiert. 2. Variante: Wenn das Thema schon in der vorhergegangenen Stunde vorbereitet wurde, entwickelt ein Schüler - unterstützt von der Klasse und dem Lehrer - eine Aufgabe an der Tafel. Es werden in Stillarbeit ähnliche Aufgaben zur Einübung des Verfahrens gelöst“ (S. 226).

Der im Fach Mathematik so dominierende fragend-entwickelnde ging aus der sogenannten sokratischen Methode hervor, bei der durch logisch aufeinander aufbauende Lehrerfragen der Schüler seine Einsicht in ein Unterrichtsthema schrittweise und selbständig entwickeln und damit seine Denkkraft bilden sollte. Ihr zentrales Mittel, die entwickelnde Lehrerfrage, ist mit der Pädagogik der Aufklärung in Verbindung zu bringen. Ihr zufolge lässt sich nicht nur alles lehren, was vernünftig ist, sondern jeder Schüler kann es auch kraft seiner Vernunft selbst erkennen. Der Schüler solle lernen, ‘selbständig’ und ‘kritisch’ zu denken, und nicht Wahrheiten vom Lehrer übernehmen, sondern sie selbst finden. Im Prinzip autonom gelange er, unter Führung des Lehrers, allein zu den gültigen Einsichten – so die optimistische Vorstellung.

Da die Vertreter des fragend-entwickelnden Verfahrens (z. B. die Pädagogen *G. F. Dinter* und später *F. Diesterweg* und *A. Reinstein*), dieses vor allem mit einem formalen Bildungseffekt ("Denkkraft", "Verstand") begründeten, erschienen gerade mathematische oder vergleichbar "rationale" Inhalte am besten geeignet. A. *Reinstein* zufolge besteht die Mathematik aus einem festen System von Begriffen, Urteilen und Schlüssen, die vernünftig und logisch aufgebaut sind. Die Begriffe seien durch Urteile (wahre Sätze), und die Urteile wiederum durch logische Schlüsse verbunden. Der Mathematiklehrer habe daher seine Fageketten so aufzubauen, dass der Schüler, kraft seiner eigenen Vernunft, schrittweise vom bekannten Begriff über Urteile zum neuen Begriff gelange, oder vom bekannten Urteil über logische Schlüsse zum neuen Urteil. Sofern der Lehrer die ausgeklügelten Regeln der Fragetechnik beherrsche, wird ihm hier ein idealer Mathematikunterricht versprochen, in dem der Lehrer nur Fragen stelle und die geistige Tätigkeit der Schüler zwangsläufig den gewünschten Fortschritt im Stoff erbringe.

Im 19. Jahrhundert setzte sich das fragend-entwickelnde Lehrverfahren dann auch in der Praxis durch. Nun sollten allerdings offene Problemfragen, Impulse u. ä. die Eigenaktivität der Schüler noch stärker fordern und zur selbständigen Auseinandersetzung mit Unterrichtsgegenständen, mit Problemen etc. anregen, während sie mit Entwicklungsfragen strikt entlang eines vom Lehrer vorbestimmten Ideenganges geführt wurden. (Mehr zur Geschichte und zur Beschreibung des fragend-entwickelnden Mathematikunterrichts bei MAIER & VOIGT 1989.)

In den vergangenen Jahrzehnten beschäftigte sich eine Reihe von Forschungsarbeiten mit dem fragend-entwickelnden Mathematikunterricht. Es zeigte sich dabei, dass er sich aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten und untersuchen lässt, die alle einen relativ engen Bezug zur verbalen Kommunikation und damit zum Problem der Unterrichtssprache haben. Die wichtigsten Befunde sollen nachfolgend vorgestellt und didaktisch bewertet werden. Zum einen werden in der sprachlichen Interaktion zwischen dem Lehrer und den Schülern, aufgefasst als sozialer Prozess der Wissenskonstruktion, Strukturen entdeckt, die zu einer klassifizierenden Beschreibung Anlaß geben (3.2.1). Zum anderen richtet sich die Aufmerksamkeit in verschiedener Weise auf die fachinhaltliche Bedeutung von Sprachbeiträgen des Lehrers und der Schüler, also auf den Gegenstand der Wissenskonstruktion, was zur Grundlage einer Evaluation des Diskurses nach dem Kriterium fachlicher Lehr- und Lernziele dient (3.2.2).

3.2.1 Strukturelle Aspekte der unterrichtlichen Interaktion

Nachdem CICOUREL u. a. (1974) die ersten Arbeiten vorgelegt hatten, nahm in Deutschland die interpretative Unterrichtsforschung Ende der 70er Jahre ihren Ausgangspunkt von der Arbeitsgruppe um *Bauersfeld*. Deren Befunde zu strukturellen Aspekten der Interaktion im alltäglichen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht sollen daher im Zentrum dieses Abschnitts stehen. Sie werden ergänzt durch ausländische Forschungen, die z. T etwas anderen Analysegesichtspunkten folgen.

a) Der „Dreischritt“ im fragend-entwickelnden Unterricht

MEHAN (1979) stellte nicht nur fest, dass der Großteil des Unterrichts, damit auch des Mathematikunterricht in der sog. fragend-entwickelnder Form gestaltet wird, sondern beschrieb auch dessen interaktive Struktur präzise. Er stellt eine Abfolge von sich wiederholenden Dreischritten dar, deren Elemente MAIER (1995) im Anschluß an MEHAN so charakterisiert:

(1) Am Beginn jedes Dreischritts steht eine Lehreräußerung mit Aufforderungscharakter an die Schüler, der eine deutlich erkennbare, formale wie inhaltliche Leitfunktion zukommt. Man kann sie als *Instruktion* bezeichnen. Im einzelnen handelt es sich dabei
- um *Impulse*, welche jeden einzelnen Schüler direkt oder indirekt zu Aussagen über die in Behandlung stehenden (mathematischen) Sachverhalte auffordern ("product elicitations");
- um *Impulse*, welche Schüler direkt oder indirekt zu nichtsprachlichen, auf die zur Bearbeitung stehenden Sachverhalte bezogene Handlungen auffordern ("directives"); oder
- um *Mitteilungen*, welche alle Schüler zur Kenntnis nehmen sollen, und die spätere Impulse vorbereiten oder einleiten ("informatives").

(2) Die anschließenden Sprachbeiträge der einzelnen Schüler sind zum größten Teil *Antworten oder Reaktionen* auf die Instruktion des Lehrers. Nur sehr selten stellen Schüler von sich aus Fragen oder bestimmen gar durch eine spontane Sprachäußerung den Fortgang der gemeinsamen Erarbeitung.

(3) Schließlich gibt es Sprechbeiträge der Lehrperson, die ihrerseits vorwiegend als Reaktionen auf Schüleräußerungen zu verstehen sind, und die als *Kommentare* bezeichnet werden können. Mögliche Kommentarformen sind:
- Bewertende Aussagen des Lobs, der Zustimmung, der Korrektur, der Kritik oder der Zurückweisung; diese sind inhaltlich zumeist unmittelbar auf Äußerungen einzelner Schüler bezogen oder
- Sachaussagen mit dem Charakter der Zusammenfassung, der Präzisierung, der Ergänzung oder der Erweiterung, zumeist bezogen auf alle der zu einer Instruktion oder Instruktionsfolge gehörenden Schülerbeiträge.

Gelegentlich fehlt der Kommentar und der Lehrer lässt nach den Antworten der Schüler sogleich eine neue Instruktion folgen. In manchen Fällen sind Kommentare schwer von Mitteilungen im oben genannten Sinn abzugrenzen; die Übergänge scheinen fließend. Es gibt Mitteilungen bzw. Sachaussagen des Lehrers, die jeweils als unmittelbare Reaktion auf Schülerbeiträge zu verstehen sind und doch zugleich den Charakter von weiterführenden Mitteilungen bzw. Impulsen haben. Zumeist zerfallen aber solche längeren, zusammenhängenden Sprechbeiträge doch deutlich in einen Kommentarteil und einen nachfolgenden Teil mit Aufforderungscharakter, der dann die Instruktion für den folgenden Dreischritt darstellt.

b) Das „Trichter-Muster“ im fragend-entwickelnden Unterricht

Im gemeinsam erarbeitenden bzw. fragend-entwickelnden Mathematikunterricht kommt es häufig dazu, dass der Lehrer gemeinsam mit den Schülern der Klasse die Lösung einer mathematischen Aufgabe oder eines mathematischen Problems erarbeiten möchte. Er präsentiert damit eine relativ komplexe Anforderung an das Leistungsvermögen der Schüler, der diese oftmals nicht oder nicht in erwünschter Weise entsprechen können. Was dann häufig geschieht, exemplifiziert BAUERSFELD (1978) anhand des folgenden Beispiels aus einer 4. Grundschulklasse.

Es wurde eine Textaufgabe gestellt, in der die Wassermenge zu berechnen ist, die eine Heilquelle mit einer Ausschüttung von 200 hl pro Stunde a) täglich, b) monatlich und c) jährlich liefert. Nachdem sich niemand aus der Klasse zur Lösung anbot, entspann sich folgender Diskurs mit einer Schülerin (S. 159 f):

Lehrerin:	... da ist kein bestimmter Monat angegeben, dann nimmt man 30 Tage und rechnet mit den 30 Tagen, und in a) ist ja die Wassermenge von einem Tag schon angegeben. Und wieviel ist dann das für einen Monat?
Schülerin:	(schweigt)
Lehrerin:	Na, du weißt, ein Monat hat 30 Tage...
Schülerin:	(bejahend) Hm...

Lehrerin: ... und nun?
Schülerin: (schweigt)
Lehrerin: Eine Stunde, du brauchst ja jetzt noch gar nicht zu sagen, wie viel ein Tag hat, das musst du ja erst ausrechnen, also ein Tag hat x Hektoliter, nicht...
Schülerin: (schweigt)
Lehrerin: Na, wie viel haben wir gesagt für einen Monat?
Schülerin: 30 Tage
Lehrerin: Also x Hektoliter mal 30. Das wären dann die Hektoliter für einen Monat.

Die zugrunde liegende Interaktionsstruktur, die BAUERSFELD „Trichter-Muster“ nennt, beschreibt er verallgemeinernd auf folgende Weise (siehe 1978, S. 162 und 1988, S. 36):

(1) Der Lehrer stößt auf eine Schwierigkeit bei einem Schüler, der z. B. einen Fehler macht, einen Schluss nicht zieht, eine mathematische Operation nicht erkennt, kurz eine ihm gestellte Aufgabe nicht lösen kann.

(2) Der Lehrer beginnt mit einer kurzen Frage, um den Schüler zu einer Antwort bzw. zur Selbstkorrektur anzuregen, erhält aber erneut keine oder eine unbefriedigende Reaktion.

(3) Der Lehrer setzt sein Bemühen um eine seinen Erwartungen angemessene Antwort des Schülers fort. Er geht weiter zurück, um für den Denkschritt notwendige Voraussetzungen zu sammeln und zu klären, z. B. indem er Elemente der erwarteten Antwort erfragt.

(4) Fortgesetztem Ausbleiben der erwarteten Antwort von Seiten des Schülers begegnet der Lehrer, indem er sich mit präziseren, d. h. engeren Fragen zunehmend auf Anstöße für „angemessene“ Antworten konzentriert. Dadurch reduziert er schrittweise die Erwartung an die Fähigkeit des Schülers zur Selbstkorrektur, und zwar in einer Weise, die mit seinen eigenen Absichten in Widerspruch steht.

    Der Schüler realisiert zum einen die zwar vereinfachte aber um so striktere Forderung, zum anderen die wachsende Spannung. Wenn seine eigenen Konstruktionsbemühungen sich nicht mit den verengenden Zielen des Lehrers treffen, schwinden die Chancen für eine erfolgreiche Beendigung der Interaktion. Die Spannung nimmt auf Lehrer- wie auf Schülerseite zu.

(5) Wenn die Zuspitzung bei der einfachsten präzisen Wiederholung oder Komplettierung durch den Schüler ankommt, ist der Kulminationspunkt erreicht. Nun genügt ein erwartetes Wort von Schülerseite, damit der Lehrer die gesamte Lösung selbst präsentiert. In jedem Fall endet das Muster mit der Präsentation der Lösung, unabhängig davon, durch wen dies geschieht.

Das beschriebene Muster kann zwar auch an irgendeiner Stelle abbrechen, aber dies wird mit jeder der beschriebenen Stufen unwahrscheinlicher.

Der Trichter-Effekt wird natürlich von den an der Interaktion Beteiligten nicht absichtlich erzeugt. Er entsteht dadurch, dass die Lehrerin auf ihre relativ komplexe oder offene Aufgabe bzw. Frage eine ganz bestimmte Antwort erwartet. Weil sie ihr bedeutsam für den gewünschten Lerneffekt bei den Schülern erscheint, hält sie an dieser Erwartung auch dann fest, wenn diese nicht oder nicht in der gewünschten Weise antworten. Sie teilt daher die Aufgabe in Teilaufgaben bzw. die Frage in Teilfragen, was die Erfüllung der Antworterwartung erleichtern soll. Bleibt auch dieser Versuch erfolglos, setzt sie die Strategie der Teilung fort, mit dem Ergebnis, dass sich für die Schüler der Handlungsspielraum immer mehr verengt. BAUERSFELD spricht von „Handlungsverengung durch Antworterwartung“ (1978, S. 162). Dabei sieht er das Mathematikspezifische an diesem Muster nicht in der Struktur selbst, „sondern in den zahlreichen möglichen Anlässen, die mathematische Inhalte und ihre unterrichtlichen Kodierungen zur Einleitung des Musters bieten“ (ebd., S. 163).

Wie ist dieses Muster didaktisch zu beurteilen? Während es aus der Sicht der Lehrerin als intensives Bemühen um aktive Beteiligung von Schülern an der Gedankenentwicklung und als helfende Zuwendung empfunden wird, kann es aus der Schülersicht zunehmende Sinnentleerung und Verlust des gedanklichen Zusammenhangs bedeuten. Der Schüler vermag zwar eventuell auf Grund rudimentärer Kenntnisse eine Teilfrage zu beantworten, weiß aber vielleicht weder, warum er diese Antwort gibt, noch welche Bedeutung ihr für die Beantwortung der ursprünglich gestellten Frage bzw. die Lösung der ursprünglich gegebenen Aufgabe zukommt. Es mag allerdings weniger leistungsstarken Schülern als Überlebensstrategie erscheinen, sich auf das Muster einzulassen. Dabei droht ihnen aber mit dem Sinnverständnis für die gerade behandelte Aufgabe oder Problemstellung auch das Sinnverständnis für mathematisches Tun überhaupt verloren zu gehen.

Auch KANE (1992) kommt zu einer sehr negativen didaktischen Beurteilung des Trichter-Musters. Er exemplifiziert es selbst an einem Unterrichtsausschnitt, bei dem es schlicht um das Lösen der Aufgabe 9 + 7 = ... geht. Der aufgerufene Schüler sei zwar äußerlich aktiv.

> „However, close examination of the students' activity reveals that his role in the discourse consists of nothing more than adding one to the sum the teacher has provided. In order to participate in the exchange, the student did not need to understand or let alone even use a thinking strategy to give correct responses to the teacher's funnelling questions. All that was necessary was for him to fill in the missing number to complete the teacher's sentence. The teacher, on the other hand, was the one who was actually engaged in the cognitive activity of using thinking strategies as she created a series of related number sentences to generate the answer to 9 plus 7." - „The nature of the communication and the form of discourse described is one in which students' thinking during the interaction is focused on trying to figure out what response the teacher intends rather than thinking mathematically. Further, interpretation suggests that students, in fact, interpret the teacher's directives as procedures they are expected to follow and thus develop a stance toward learning mathematics in which the goal is to follow predetermined procedures provided by the teacher" (S. 6).

c) *Interaktionsmuster und Routinen*

Einer interaktionistischen Sichtweise folgend fasst VOIGT (1984) den fragend-entwickelnden Unterricht als einen Prozess auf, in dem Lehrer und Schüler gemeinsam fachliches Wissen konstituieren. Aus dieser Perspektive möchte er untersuchen, „auf welche Weisen das Lehren und Lernen mathematischer Inhalte situativ ausgeformten Regelmäßigkeiten folgt. Die Aufdeckung solcher Regelmäßigkeiten, die Klärung ihrer Funktion im alltäglichen Unterrichtsprozess und die Andeutung ihrer Folgen für das Lernverhalten der Schüler sollen gestatten, ... Merkmale der Interaktion im Mathematikunterricht zu explizieren" (S. 1). Soziale Strukturierungen von Mikroprozessen der unterrichtlichen Interaktion sollen „in Beziehung gesetzt werden zu der gemeinsamen Themenentwicklung im Unterricht und zu der Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen von Lehrer und Schüler" (S. 2).

Auf der Basis der Annahme, dass sprachliche Äußerungen prinzipiell als mehrdeutig aufzufassen sind, gleichwohl aber Bedeutungen intersubjektiv geteilt werden, und dass im Unterricht die Gesprächssituation von den einzelnen Teilnehmern subjektiv definiert wird, entwickelt er dann ein theoretisch-analytisches Beschreibungssystem, das gestatten soll, „Regelhaftigkeiten in kurzen Sequenzen alltäglichen (Mathematik-) Unterrichts darzustellen" (S. 46). Dieses wird unter den zentralen Kategorien Interaktionsmuster und Routine entwickelt.

Interaktionsmuster definiert VOIGT als „Strukturen der Interaktion zweier oder mehrerer Subjekte", die bestimmte Merkmale aufweisen. Sie beschreiben soziale Prozesse der gemeinsamen Wissenskonstruktion, in welche die beteiligten Individuen ihre persönlichen Situationsdefinitionen, ihre privaten Ordnungsvorstellungen und subjektiven inhaltlichen Vorverständnisse einbringen. Letztere – Erfahrungsmuster genannt – treten in eine gewisse Spannung zueinander, die im Verlauf der Interaktion bis zu einem gewissen Grad abgebaut werden muss. „Ein von außen betrachtet musterartiger und reibungsloser Unterricht setzt damit eine gewisse Passung der situationsspezifisch aktualisierten Erfahrungsmuster der Schüler und des Lehrers voraus" (S. 61). Kurzfristig bestehende Passung ist im sog. working consensus gegeben. „Insgesamt lässt sich daher ein Interaktionsmuster vorstellen als ein Netzwerk von Handlungen und impliziten Zugzwängen für nachfolgende Handlungen, wobei die Zugzwänge auf dem Hintergrund derjenigen Erfahrungsmuster handlungsentscheidend wirken, deren Verhältnis in Form des working consensus ein abgestimmtes, musterartiges Handeln der Beteiligten erlaubt.“ (S. 62)

Es gilt nun, in der unterrichtlichen Interaktion die Spannung zwischen Zugzwang und Spontaneität wie zwischen Erfahrungsmustern und working consensus dauerhaft so weit zu überbrücken, dass Interaktionsmuster ‘funktionieren’, d. h. ihrer Funktion für das Lernen der Schüler gerecht werden. Das kann nur mit Hilfe eines Prinzips gelingen, das VOIGT Routine nennt. Interaktionsmuster werden durch die schulischen Alltagsroutinen des Wahrnehmens, Erwartens und Handelns Schritt für Schritt interaktiv realisiert. „Die Routine tritt im Kontext auf und setzt ihn. Das Interaktionsmuster erscheint so aus der Beobachterperspektive als ein Netzwerk von Routinedeutungen, -erwartungen und -handlungen der beteiligten Subjekte. Das Interaktionsmuster als ganzes bleibt eine in der Analyse konstituierte Struktur“ (S. 68). Die Angemessenheit der vom jeweiligen Erfahrungsmuster ‘nahegelegten’ Routine wird also vom Handelnden nicht hinterfragt und ist daher für ihn auch in der Regel nicht durchsichtig. Der Mathematikunterricht bildet, vor allem in seiner fragend-entwickelnden Form viel Anlass zur Ausbildung von Routinen. Sie können eingeübt werden oder sich verdeckt bilden.

Mit Hilfe eines elaborierten Verfahrens der Interpretation bzw. Analyse von Transkripten alltäglichen Mathematikunterrichts findet VOIGT, unter Anwendung der vorgängig entwickelnden Begriffskategorien, in den analysierten Unterrichtseinheiten eine Reihe von realisierten Interaktionsmustern sowie auf Lehrer- und Schülerseite wirksame Routinen. Er arbeitet häufig auftretende Interaktionsmuster heraus und ordnet ihnen ganz Typen von wirksamen Routinen zu.

Das Erarbeitungsprozessmuster ist durch einen dreiphasigen Prozess charakterisiert, der folgende Merkmale aufweist (S. 128 f):

– In der ersten Phase stellt der Lehrer eine Aufgabe, welche die Schüler nicht eindeutig zu beantworten wissen. Anderen als formal-logischen Prinzipien folgend bieten sie Lösungsansätze an, die der Lehrer direkt oder indirekt als richtig, falsch, hilfreich usw. bewertet. Auf diese Weise wird ein vorläufiges Aufgabenverständnis hergestellt.
– In der zweiten Phase wird von den Beteiligten ein offiziell geltendes Ergebnis gemeinsam produziert, indem ein vom Lehrer bestimmter Ansatz entwickelnd verfolgt wird.
– In der dritten Phase werden die Aufgabe, die Lösung oder der Lösungsweg selbst zum Gegenstand eines interpretierenden Gesprächs gesetzt.

Handlungsroutinen, die sich in Verbindung mit diesem Interaktionsmuster rekonstruieren lassen, sind die folgenden: In der ersten Phase stellt der Lehrer eine offene Frage, auf die von vorne herein von Seiten der Schüler keinerlei relevante und differenzierte Antworten zu erwarten sind. Die Frage ist als ein improvisierter und vorläufiger Versuch zu interpretieren, weshalb VOIGT die zugrunde liegende Routine provisional try nennt. Die folgenden Schülerantworten werden zunehmend beliebiger, willkürlicher und sinnloser. Sie folgen einer Handlungsroutine, die Versuch-Irrtum-Verfahren genannt wird.

Wie beliebig die Antwort für Schüler sein kann, zeigt sich auch daran, dass sie ihrer Antwort oftmals eine zweite oder weitere (evtl. ganz andersartige) nachschieben. Dies „lässt auf die Handlungsroutine der taktischen Verwendung von Wörtern und Wendungen schließen, die der Lehrer als signifikant andeutet. Weil sich der Schüler jedoch der Bedeutung der gebrauchten Wörter nicht sicher ist, geschieht diese Verwendung zugleich tentativ erprobend“ (S. 146). VOIGT spricht im Zusammenhang mit dieser Schülerroutine von einer „taktisch-tentativen Verwendung des Lehrercodes“. Der Schüler gebraucht die Wörter eigentlich nicht, um etwas zu bezeichnen, sondern um den Eindruck zu erwecken, er habe das Bezeichnete verstanden. Er ist erfolgreich, wenn entsprechend auch der Lehrer diese Wörter als Erkennungszeichen für ein dahinter vermutetes Verständnis nimmt. Als Taktik wird diese Handlungsweise nur sichtbar, wenn sie erfolglos bleibt. [16]

Eine weitere Schülerroutine, die ebenfalls vor allem in der ersten Phase des Erarbeitungsprozessmusters auftritt, besteht in der Regel, eine Lösung nur durch Angabe von relevant erachteten Zahlen und der verwendeten Operation anzubieten. Es besteht Bedeutungsunsicherheit, weil keine Sinnzusammenhänge konstruiert werden, sondern der Tätigkeitsbezug und die Quantifizierung im Vordergrund stehen. „Möglicherweise ist gerade dadurch die Handlungsroutine im Sinne der Reduktion von Komplexität erfolgreich: Sie belastet den Schüler nicht mit einer tieferen Einsicht in die Problemstellung (...) bzw. den Lehrer nicht mit einer sorgfältigen Explikation des Problemzusammenhangs (...) und lässt andererseits doch zu, dass der Lehrer in der dritten Phase einen Sinnzusammenhang über die Zahlenangaben und Rechenschritte konstruiert“ (S. 147). Diese Routine nennt VOIGT Sprachreduktion, weil die im Lehrer-Schüler-Dialog vorhandenen Sprachmöglichkeiten nicht ausgeschöpft werden.

Die Lehrerroutine der Häufung suggestiver Hinweise tritt nicht nur in der ersten, sondern auch in der dritten Phase des Erarbeitungsprozessmusters auf und erweckt hier den Anschein einer „inszenierten Dialektik“. Der Lehrer stellt suggestiv eine Frage, die eine Verneinung provoziert. Er fordert dann den Schüler wiederum suggestiv auf, den in der Antwort bisher nicht genügend entwickelten Aspekt hervorzuheben, und der Schüler antwortet entsprechend. „In seiner Rephrasierung bietet der Lehrer die ‘Synthese’, die verbindliche Aussage (...). Die Äußerungsfolge erscheint als ‘inszeniert’, da der Lehrer die möglichen Antworten eindeutig vorstrukturiert. Sie verläuft scheinbar dialektisch, da nicht die Logik der Sache, sondern die Logik der Interaktion mit ihren jeweiligen Zugzwängen maßgeblich wirkt. Das szenische Mitvollziehen der Äußerungsfolge ersetzt hier möglicherweise für einige Schüler die individuelle Auseinandersetzung mit dem empirischen Gesetz der großen Zahl“ (S. 151).

Ein anderes vom ihm rekonstruiertes Interaktionsmuster nennt VOIGT „Muster der inszenierten Alltäglichkeit“ oder kurz „Inszenierungsmuster“; es lässt sich auf folgende Weise beschreiben (S. 177 f): In der ersten Phase knüpft der Lehrer an außerschulische Alltagsvorstellungen der Schüler an. Er stellt eine entsprechende Aufgabe, die insofern mehrdeutig ist, als den Schülern die mathematisch relevanten Grundlagen fehlen, um sicher die vom Lehrer gewünschte Antwort geben zu können. In der zweiten Phase antwortet ein Schüler konsistent auf der Grundlage seiner subjektiven Erfahrungen im außerschulischen Alltag, allerdings nicht in dem vom Lehrer gewünschten Sinne. Dies führt dazu, dass der Lehrer in der dritten Phase die außerschulischen Alltagsvorstellungen des Schülers abwehrt: Der Lehrer ändert den Aufgabenkontext so, dass der alltagsweltliche Sinnzusammenhang zwar äußerlich erhalten bleibt, aber um zur Lösung zu gelangen, verlassen werden muss. Meistens kommt es daraufhin zu einer vierten Phase, in der dann der Schüler Einverständnis mit der Situationsdefinition des Lehrers signalisiert.

Wie beim Prozess-Verarbeitungs-Muster wendet der Lehrer bei diesem Interaktionsmuster zu Beginn mit einer offenen Aufgabe die Routine des provisional try an. Sie tritt generell häufig in Einführungsphasen des fragend-entwickelnden Mathematikunterrichts auf. „Typisch für sie sind die Fragen des Lehrers: „Was fällt euch auf?“ oder „Welche Frage könnte man hier haben?“. Einen Sonderfall stellt die Routine der Doppel- oder Mehrfachfrage dar. In der zweiten Phase des Inszenierungsmusters versuchen die Schüler, der Lehrerfrage mit der Routine der „Versuch-Irrtum-Verfahren“ gerecht zu werden.

Eine weitere, für die dritte Phase des Inszenierungsmusters typische Lehrerroutine dient der Bewältigung einer ‘Störung’, die im Inszenierungsmuster auftritt. „Ein Schüler antwortet deutlich von der Lehrererwartung abwei-

[16] Dies erinnert an die Beschreibung des mathematischen Jargons bei D’AMORE (1996).

chend, und die Antwort ist nicht mit Rekurs auf geteilt geltende Wissensbestände von der Hand zu weisen. Der Lehrer ändert nun situationsspezifisch die Bedingungen der Aufgabe, um die Antwort auszugrenzen. Diese Routine der Änderung der Aufgabenbedingungen lässt sich verallgemeinern. Sie kann aufgefasst werden als Sonderfall der Lehrerroutine, mit Hilfe von Plausibilitätsappellen unwillkommene Schülervorschläge abzuwehren“ (S. 196 f). Sofern sich an das Inszenierungsmuster noch eine vierte Phase anschließt, wird dort eine Schülerroutine wirksam, die den in Phase 3 entstandenen Konflikt löst und die Schüler befähigt, in die Situationsdefinition des Lehrers einzuwilligen und andererseits gleichzeitig an eigenen Überzeugungen festzuhalten. Es ist „die subjektive Kennzeichnung der Mathematik als etwas Willkürliches, Wunderliches oder sogar Sinnloses“ (S. 201).

d) Geschlechtsspezifische Beteiligung an der unterrichtlichen Interaktion

GOOD & SLAVINGS (1988) konzentrieren sich in ihrer Untersuchung zu unterschiedlichem Handeln von Schülern und Schülerinnen in der unterrichtlichen Interaktion auf deren Frageverhalten. Sie gehen davon aus, dass fragende Schüler mit höherer Wahrscheinlichkeit aufmerksam sind und versuchen, Informationen aufzunehmen, oder wenigstens den Anschein erwecken wollen, aktiv am Unterricht teilzunehmen. Außerdem können Schülerfragen die Fähigkeit oder Unfähigkeit zu klarem und selbständigem Denken anzeigen.

Nach Meinung der Autoren gibt es in der Literatur deutliche Hinweise darauf, dass Buben und Mädchen in verschiedener Weise Gelegenheit erhalten, am Unterrichtsgespräch teilzunehmen. Es sei aber unklar, in welchem Maße dieser Unterschied auf die Faktoren Schüler, Lehrer, Klassenstufe oder Unterrichtsfach zurückgeführt werden können. *Leinhardt & Seewald & Engel*, die muttersprachlichen und mathematischen Unterricht der Sekundarstufe miteinander verglichen hatten, beobachteten, dass sich die sachbezogenen Kontakte zwischen Lehrer und Schülern in beiden Fächern voneinander unterscheiden, und zwar suchen die Lehrer im Mathematikunterricht mehr Kontakt zu Buben und widmen ihnen mehr Zeit als den Mädchen. *Fennema* u. a. kamen in ihrer Untersuchung zu einem ähnlichen Ergebnis. Sie fanden auch heraus, dass Buben mehr Kontakt zum Lehrer suchten als Mädchen. *Morse* und *Handly*, die 155 Oberstufenschüler im naturwissenschaftlichen Unterricht beobachtet hatten, fanden, dass in der 7. Jahrgangsstufe 41% der Lehrer-Schüler-Interaktion von Mädchen initiiert war, in der 8. Jahrgangsstufe jedoch nur noch 30%. Umgekehrt wuchs die Initiative der Buben innerhalb von zwei Jahren von 50% auf 70% an. Die Lehrer interagierten deutlich mehr mit Jungen als mit Mädchen und fragten sie häufiger. Allerdings stehen allen diesen Befunden auch andere Untersuchungen gegenüber, die keine nennenswerten Unterschiede bezüglich der Verteilung von Lehrer-Schüler-Interaktionen auf die Geschlechter erkennen ließen. So konnte etwa *Becker* in den von Schülern initiierten Kontakten mit dem Lehrer im Rahmen von 10 Geometriestunden der Sekundarstufe keinen signifikanten Geschlechtsunterschied finden. Allerdings berichtet *Becker* auch, dass Buben mehr Gelegenheiten hatten zu antworten als Mädchen, weil sie von den Lehrern häufiger aufgerufen wurden. Außerdem richteten sich Fragen an Buben mehr auf die Erklärung von Prozessen als auf die Feststellung von Fakten.

GOOD & SLAVINGS wollten dem Problem von Geschlechtsunterschieden im Frageverhalten selbst in etwas differenzierterer Weise nachgehen. Sie bildeten zehn Fragekategorien (Erklärungsfragen, Informationsfragen, Klärungsfragen, Bestätigungsfragen, prozedurale Fragen, nicht aufgabenbezogene Neugierfragen, Ablenkungsfragen, aufgabenbezogene Aufmerksamkeitsfragen, nicht aufgabenbezogene Aufmerksamkeitsfragen und sonstige Fragen) und ermittelten die Verteilung dieser Fragen auf Jungen und Mädchen in drei Grundschulklassen und zwei Klassen der Sekundarstufe. Dabei zeigten sich insgesamt nur sehr wenige signifikante Unterschiede, und diese betrafen folgende Punkte: Buben stellten im Fach Mathematik mehr Fragen als im muttersprachlichen Unterricht, und zwar vor allem Erklärungsfragen. Jedoch unterschieden sich auch hier die Ergebnisse von Klassenstufe zu Klassenstufe. Mädchen stellten in Mathematik mehr Erklärungsfragen und mehr aufgabenbezogene Aufmerksamkeitsfragen als im muttersprachlichen Unterricht, obwohl sie im letzteren aktiver waren als die

Jungen, während sie sich im Fach Mathematik eher stärker zurückhielten als diese. Im Fach Mathematik fragten die Buben deutlich mehr, und der Unterschied erwies sich für folgende Fragearten als signifikant: Erklärungsfragen, Klärungsfragen, Bestätigungsfragen und prozedurale Fragen. Am ausgeprägtesten war der Unterschied in den unteren Klassenstufen.

JUNGWIRTH (1989 und 1991) analysiert den fragend-entwickelnden Unterricht nach dem Gesichtspunkt, wie weit sich unterschiedliche Formen der Beteiligung an der Interaktion auffinden lassen, die auf Unterschiede im Geschlecht der Lehrperson und der Schüler zurückgeführt werden können. Auf der Basis der von ihr analysierten Unterrichtseinheiten in koedukativ geführten Klassen kommt sie zu dem Ergebnis, dass das Geschlecht der Lehrenden den Interaktionen keine spezifische Wendung gibt. Unterschiede zeigen sich jedoch in Abhängigkeit vom Geschlecht der Schüler. Zum einen zeigen Mädchen andere Formen der Beteiligung an der unterrichtlichen Interaktion als Buben, zum anderen lassen sich auf Seiten der Lehrenden Praktiken auffinden, die sie nur in (bestimmten) Interaktionen mit Mädchen bzw. in solchen mit Buben verwenden. Im Einzelnen lassen sich die wichtigsten Ergebnisse kurz so zusammenfassen:

– Kommt es zu einer Schüleräußerung, die quer zu den Erwartungen der Lehrperson liegt, so sieht sich diese veranlasst, die Schüleräußerungen auf die gewünschte Lösung hinzuführen. Dies kann in autoritativer oder argumentativer Weise geschehen. Es scheint so zu sein, dass die Lehrperson die <u>argumentative Durchsetzung</u> der gewünschten Lösung vor allem dann praktiziert, wenn die quer liegende Äußerung von *Buben* kommt. In Fällen, in denen sich eine deutlich von der Lehrererwartung abweichende Äußerung eines Buben nicht über eine ‘fein abgestimmte Bewertung’ abwehren ließ, wies die Hinführung auf die erwartete Antwort eine argumentative Struktur auf. „Die Lehrperson stuft zunächst die Äußerung des Schülers als ’an sich’ richtig ein, bekräftigt aber dann über ein Argument ihre eigene Lösung. Mit diesem wird dem Schüler Gelegenheit zu einer Erwiderung geboten“ (1989, S. 38). Eine autoritative Durchsetzung der gewünschten Lösung trat vor allem in den Fällen auf, in denen bei Beteiligung von *Mädchen* keine übliche Lenkung auf das richtige Ergebnis beobachtet werden konnte. „Die Lehrperson anerkennt zwar auch hier die Äußerung der Schülerin als grundsätzlich richtig, macht aber daraufhin sofort die von ihr selbst favorisierte Lösung zur gültigen“ (1989, S. 45). Sie versucht nicht, die Schülerin von ihrer Lösung zu überzeugen. Stattdessen setzt sie die von ihr erwartete Lösung kraft ihrer Autorität durch.
– Antworten auf <u>offene</u>, d. h. zugleich vieldeutige Fragen werden häufiger von *Buben gegeben.* Sie zeigen wenig Scheu zu raten. Mädchen sind tendenziell um so weniger aktiv am Interaktionsprozess beteiligt, je offenere Fragen gestellt sind, je mehr sie also auf die Verwendung der Versuch-und-Irrtum-Methode angewiesen wären, um zu einer akzeptablen Antwort zu gelangen. „Ihre typische Reaktion auf nicht eindeutig beantwortbare Fragen scheint ein abwartendes Schweigen zu sein“ (1989, S. 57).
– In Übungs- und Wiederholungsphasen fällt die besondere Kurztaktigkeit des Wechselspiels von Lehrer- und Schüleräußerungen auf. Hier konnte JUNGWIRTH ausschließlich bei *Mädchen* ein Phänomen beobachten, dass sie als ‘überkomplette Darstellung’ beschreibt. Eine solche entsteht, wenn nach einer Äußerung der Schülerin diese anschließend durch schrittweises Herausfragen in aufgespaltener Form noch ein zweites Mal wiederhergestellt wird. Das Mädchen hat offenbar zu früh oder ‘zu viel’ gesagt, oder es hat das Gewünschte anders formuliert.
– Es gibt Episoden, in denen deutlich werdende Wissens- oder Verstehenslücken von Schülern überbrückt werden müssen. Das versuchen Buben meist dadurch, dass sie das Defizit als momentane Unsicherheit, als vorübergehenden Konzentrationsmangel, als bloßen Irrtum erscheinen lassen und durch Randbemerkungen und Einwürfe nicht vorhandenes Wissen vortäuschen. Man kann daher diese Form der *Kaschierung* als *bubentypische* Variante des *Umgangs mit Nichtwissen und Nichtverstehen* betrachten. Schülerinnen hingegen neigen in einer Situation unerwünschter Antworten offenbar eher dazu, den zu Beginn eingeschlagenen Weg

weiterzuverfolgen und auf den damit verbundenen Vorstellungen zu beharren, auch wenn diese schon als falsch zurückgewiesen wurden; d. h. *Mädchen „emergieren" ihr Nichtwissen*, wie JUNGWIRTH das nennt. „Wenn ihr Ansatz zu deutlich abgelehnt wurde, um ihn explizit beibehalten zu können, schweigen sie eher, als solche Hinweise aufzugreifen" (S. 96). – „Möglicherweise sind Mädchen in stärkerem Maße als Buben beim Handeln auf sinngebende Orientierungsschemata angewiesen als Buben. Mädchen wären dann weniger als Buben in der Lage, bei subjektiv empfundener Sinnlosigkeit der (Frage)situation sich am Gespräch zu beteiligen und Antworten auf gestellte Fragen zu finden" (1989, S. 105).

Insgesamt dürfte, JUNGWIRTH zufolge, den Buben aufgrund ihrer alltagsweltlichen Gesprächserfahrungen der Ablauf der Interaktion im fragend-entwickelnden Mathematikunterricht vertrauter sein als den Mädchen; es scheint ihnen besser als den Mädchen zu gelingen, ihre außerhalb des Unterrichts gebildeten Gesprächsgewohnheiten in diesem Unterricht erfolgreich einzusetzen.

3.2.2 Inhaltliche Aspekte der unterrichtlichen Interaktion

Nachdem vorausgehend Befunde zu strukturellen Gesichtspunkten der sprachlichen Interaktion im Mathematikunterricht vorgestellt wurden, soll nachfolgend der Blick auf Untersuchungen zu deren fachinhaltlichen Aspekten gerichtet werden.

a) Mitwirkung der Schüler an der Erarbeitung von Wissen

Warum wählen die Lehrer im Mathematikunterricht, wie oben dargestellt, in so hohem Maße auch bei Aufgaben der Übermittlung von Kenntnissen und Instruktionen die gemeinsame Erarbeitung als Interaktionsform? Leider weiß man zu wenig über die Gesichtspunkte und Grundsätze, nach denen unterrichtsmethodische Entscheidungen gefällt werden. Die wenigen Untersuchungen über subjektive Unterrichtstheorien (s. HOPF 1980 und HEYMANN 1982) lassen vermuten, dass dies vermutlich nicht sehr bewusst und theoriegeleitet geschieht. Vielleicht stellt der erarbeitende Unterricht den Versuch dar, den traditionellen Lehrervortrag mit dem von der Aufklärungspädagogik und der Arbeitsschulbewegung formulierten Grundsatz der geistig autonomen Schülerarbeit zu verbinden, ohne sich auf die zugehörigen, aber unterrichtsorganisatorisch anspruchsvollen Formen der Individual-, Partner- und Gruppenarbeit einlassen zu müssen. Lässt sich aber fragend-entwickelnd tatsächlich eine selbständige und verstehende Wissensaneignung erreichen?

In den Einzelinterviews mit Schülern verschiedener Altersstufen, die MAIER (1995) im Rahmen des VIMU-Projekts in unmittelbarem jeweils Anschluss an Einführungsstunden in verschiedene mathematische Themen durchführte, vermochte der gemeinsam erarbeitende Mathematikunterricht eher geringe Verstehenseffekte hervorzubringen. Viele Schüler hatten aus ihm nur einzelne, zumeist zusammenhanglose Wissensfragmente in das Interview gerettet: bedeutungsleere Bezeichnungen und Symbole, sinnleere formale Prozeduren, anschauliche Vorstellungen ohne Bezug zu den mathematischen Ideen, die auf sie gegründet werden sollten, usw. Mögliche Erklärungen für diese enttäuschenden Ergebnisse ließen sich aus den Analysen des vorausgegangenen Unterrichts gewinnen:

– Am erarbeitenden Unterrichtsgespräch beteiligt sich in aller Regel nur ein relativ kleiner Teil der Klasse aktiv; viele Schüler schweigen völlig oder liefern nur marginale Beiträge. Dies bestätigt auch RIEHL (1991), die in einem Sammelartikel eine Reihe von empirischen Untersuchungen auswertete und auf der Basis eines umfangreichen Materials (Tonbandaufzeichnungen von 28 Mathematikstudenten, Protokolle von 40 weiteren Mathematikstunden, eigene Beobachtungen bei Hospitationen) zu folgendem Ergebnis kommt: Die Sprachäußerungen der Schüler sind auf relativ wenig Beteiligte konzentriert. So meldeten sich im Rahmen von sechs Unterrichtssequenzen zu je fünf Stunden unter 148 Schülern 15 höchstens einmal, jedoch 13 mehr als 20-mal zu Wort. Ein Schüler sprach 58-mal. Allerdings unterscheidet sich die Verteilung der Sprachbeiträge auf die Schüler von Klasse zu Klasse, von Lehrer zu Lehrer und von Stunde zu Stunde. Beispielsweise kamen bei einem Lehrer in verschiedenen Stunden zwischen 16,7% und 66,7% der Schüler zu Wort. Die insgesamt vielen unbeteiligten Schüler haben aber keinerlei Gelegenheit, ihr Verstehen des Wahrgenommenen zu überprüfen bzw. der Überprüfung durch den Lehrer auszusetzen.

– Bei den Schülerbeiträgen handelt es sich nur selten um zusammenhängende Sprachäußerungen aus mehreren Sätzen. Vorherrschend sind knappe Einzelsätze, Teile von Sätzen, z. B. die Vollendung eines vom Lehrer angefangenen Satzes, und einzelne Wörter (nachgefragte Bezeichnungen, Zahlenangaben, Antworten auf Entscheidungsfragen – ja oder nein, usw.). Diese fragmentarischen Schüleräußerungen werden aber vom Lehrer zumeist als ausreichend anerkannt, sind also erfolgreich – „erfolgreich im Sinne von funktional für die gewünschte Interpretation durch den Lehrer“ (s. VOIGT 1984) – und werden daher laufend verstärkt. Sie können wohl keine ausreichende Grundlage für eine Verifizierung des Schülerverstehens liefern und bieten auch den übrigen Schülern nur wenige Anstöße für eigenes Verstehen und eigene Wissenskonstruktion.
– Die sprachlich aktiven Schüler produzieren und formulieren das Wissen als Antworten auf Lehrerfragen bzw. als verbale Reaktionen auf Lehrerimpulse. *Lundgren* (ref. nach CAZDEN 1986, S. 441) schreibt den Lehrerfragen zwar die Funktion zu, den Unterricht in geplanter Weise voranzubringen. Beispiele aus dem Mathematikunterricht zeigen aber, dass Schüler ihre Antworten oft mehr auf Grund erlernter Muster des Unterrichtsdiskurses formen, als aus sachlichen Überlegungen ableiten. Ein Beispiel:

Lehrerin: Was ist viermal drei?	Schülerin: ach..
Lehrerin: Wie viel ist zweimal vier?	Schülerin: acht
Lehrerin: Mm, dreimal vier?	Schülerin: neun, zehn, elf, zwölf.
Lehrerin: Wie viel ist nun dreimal vier?	Schülerin: zwölf

Während hier die Lehrerin die Hoffnung haben mag, dass die Schülerin etwas über die Beziehung von Addition und Multiplikation gelernt hat, könnte diese selbst lediglich der Form der letzten Lehrerfrage einen Hinweis auf die vorausgehend erwünschte Antwort entnommen haben. Die Sprache bedient sich jedoch eines Kommunikationsmusters, das die Illusion vermittelt, ein erwünschter Lernprozess habe sich tatsächlich ereignet.

Mit der Art der Lehrerfragen im fragend-entwickelnden Unterricht beschäftigen sich *French & MacLure* (ref. nach CAZDEN, 1986, S. 441). In einer Längsschnittstudie zum Vorschulunterricht fanden sie zwei interaktive Strategien heraus, mit denen den Schülern Richtlinien für das Auffinden erwünschter Antworten übermittelt werden. Die eine dieser Strategien nennen sie ‘Vorformulierung’ (‘preformulating’) und definieren das so:

> „Teachers preface the question they want the children to answer with one or more utterances which serve to orient the children to the relevant area of experience... [and] establish as shared knowledge between herself and the child materials essential to answer her question“ (S. 35).

Die zweite Strategie nennen sie ‘Neuformulierung’ (‘reformulating’), und sie wird vor allem angewendet, wenn die ursprüngliche Schülerantwort falsch war. Damit ist gemeint, dass die Frage in einer anderen sprachlichen Form noch einmal gestellt wird, von der sich die Lehrerin mehr Erfolg verspricht. Weil solche Neuformulierungen den kognitiven Anspruch an das Kind schrittweise reduzieren, sagen die Autoren voraus, dass die Lehrer vorzugsweise die weniger spezifische Version zuerst verwenden werden, und dass die tatsächliche Abfolge eine solche des schlichten Gebrauchs ist.

– Schülerantworten im gemeinsam erarbeitenden Mathematikunterricht sind zu einem oftmals recht hohen Anteil falsch, nur teilweise richtig oder unzulänglich bzw. missverständlich formuliert. Dies kann auf Wissensmängel oder einfach darauf zurückzuführen sein, dass der antwortende Schüler die Frage bzw. Instruktion des Lehrers anders als von diesem intendiert aufgefasst hat und deshalb nicht die gleiche Frage beantwortet, die dieser gemeint oder andere Gesprächsteilnehmer verstanden haben. Dieses ist gerade im Fach Mathematik mit seiner fachlich modifizierten Lehrersprache leicht möglich. Dem einzelnen Schüler müsste es gleichwohl gelingen, Richtiges von Falschem und Wichtiges von Unwichtigem zu unterscheiden. Er müsste erkennen, ob eine Anwort überhaupt zu der gestellten Lehrerfrage passt oder nicht; und das in einem Wissensbereich, der ihm von der Voraussetzungen her in der Regel unbekannt ist. Als Unterscheidungshilfe steht ihm dabei fast nichts als die Lehrerreaktion auf die Schülerantwort zur Verfügung, die jedoch aus pädagogischen Gründen, insbesondere was die negativen betrifft, häufig sehr zurückhaltend und daher unbestimmt bzw. schwer zu interpretieren ist. Ruft beispielsweise der Lehrer nach einer Schülerantwort ohne Kommentar einen weiteren Schüler auf, lässt dieses Verhalten Deutungen zu, die von *völlig falsch – mach's besser* bis zu *sehr gut – gib eine weitere gute Antwort(formulierung)* reichen. Wiederholt der Lehrer den Impuls – und er tut dies häufig in modifizierter oder in der Bedeutung veränderter Form – erleichtert das die Deutung auch nicht eben. Es gilt dann eventuell herauszufinden, zu welcher der gestellten Fragen eine folgende Antwort nunmehr gehört.

- Je stärker die Erarbeitung vom Lehrer gelenkt wird, desto mehr sind die einzelnen Schüler der Verpflichtung enthoben, die Gedankenentwicklung geistig mit zu vollziehen. Sie können sich auf die lokale Beantwortung einzelner Fragen bzw. die lokale Befolgung von Instruktionen beschränken und sich von einer lokalen Antwort zur nächsten weiterführen lassen, ohne den Sinnzusammenhang zu erfassen. Der Lehrer, der seiner Führung einen gewissen gedanklichen Aufbau zugrunde legt und mit ihr einem bestimmten Ziel zustrebt, versucht nämlich in der Regel, die lokalen Antworten möglichst in seine Gedankenfolge einzubinden. Falsche oder unpassende Antworten übergeht er durch Aufrufen eines anderen Schülers, biegt sie entsprechend seinen Intentionen zurecht bzw. interpretiert sie entsprechend, oder er korrigiert sie einfach selbst. Nicht wenige Lehrerkommentare auf Schüleräußerungen – sie müssen ja unmittelbar aus der Situation heraus gegeben werden – erscheinen wenig überlegt, daher undeutlich, unzulänglich bis falsch. Im übrigen beendet der Lehrer, nach einer längeren Phase unbefriedigender Schülerbeiträge, nicht selten die Erarbeitung damit, dass er das Fehlende in einer eigenen Erklärung nachträgt. Doch ist auch diese dann häufig aus dem Stegreif formuliert, sachlich unvollständig und sprachlich unklar.

Was also vor allem nicht aktiv am Gespräch beteiligte Schüler von einem gemeinsam erarbeitenden Unterricht wahrnehmen, ist eine Folge

- von Fragen und Instruktionen, deren sachlicher Zusammenhang ihnen oft verborgen bleibt,
- von richtigen, halb richtigen unzulänglichen oder falschen Schülerantworten, deren Angemessenheit sie nur teilweise einzuschätzen vermögen, die vom Lehrer nur selten klar evaluiert werden und die ihnen daher kaum ausreichende Anhaltspunkte zur Generierung und Überprüfung von Verstehen bieten,
- sowie von mehr oder weniger unzulänglichen Kommentaren und Erklärungen des Lehrers, die oft auf falschen Voraussetzungen basieren, weil auch die Differenz zwischen dem vom Schüler Gesagten und dem vom Lehrer Aufgefassten bzw. Verstandenen groß sein kann.

Insgesamt nimmt der einzelne Schüler an einem zeitlich recht ausgedehnten Gespräch teil, in dem er von ständigen Störungen begleitete, teilweise verwirrende und ermüdende sprachliche Botschaften empfängt. Aus all diesen Gründen scheint es für ihn schwierig zu sein, auf der Basis des fragend-entwickelnden Unterrichts jenes Wissen und jenes Verstehen aufzubauen, dessen Erarbeitung dieser bezwecken soll.

MAIER & VOIGT (1989) hatten bezüglich der kurzschrittigen Erarbeitung von Themen im Mathematikunterricht befürchtet, dass es vielen Schülern nicht gelinge, das Thema und seine gedankliche Entwicklung zu überblicken und Substantielles zu dieser Entwicklung beizutragen. Sie meinten, das Fehlen eines gemeinsamen Problemverständnisses zwischen dem Lehrer und den Schülern könne dazu führen, dass der Unterricht ein „suggestiv gesteuerter Lehrervortag aus dem Munde des Schülers" (LENNÉ 1969) bleibt. Das Wissen, das aus der fachsystematischen Sicht des Lehrers als selbstverständliche Folgerungen aus anderem Wissen erscheint, ist für den Schüler, der nicht diesen Überblick hat, willkürliche Setzung.

Anhand illustrativer Beispiele aus der alltäglichen Unterrichtskommunikation zeigten MAIER & VOIGT aber auch, dass einige Lehrer im Rahmen des erarbeitenden Unterricht versuchen, den Schülern für ihre Mitwirkung an der Gedankenentwicklung mehr Freiheit einzuräumen als bei der traditionellen Entwicklungsfrage. Ein solcher 'offener' fragend-entwickelnder Mathematikunterricht gewährt ihren Vorstellungen und Denkwegen mehr Spielraum. Von der Lehrererwartung abweichende Schülerbeiträge scheinen zugelassen; die Lenkung ist weniger deutlich.

Da jedoch „kein Lehrer vor der Kreativität eines Schüler sicher ist" (*Bauersfeld*) und da Schüler oft grundsätzlich anders denken als der Lehrer, steht dieser hier im besonderen Maße vor der schwierigen Aufgabe, sich in geduldigem Gedankenaustausch mit den Schülern auf bestimmte mathematische Bedeutungen zu verständigen. Sein Erarbeitungsziel muss hinreichend allgemein sein, dass er sich auch mit vorläufigen Ergebnissen zufrieden geben kann. Die Schüler müssen gewohnt sein, dass der Lehrer oft lange in Schwebe hält, was er für gültig und weiterführend erachtet. Die Verständigung erscheint hier teilweise eher schwieriger und brüchiger als im Fall der kleinschrittigen Entwicklung (vielleicht auch flexibler für die situationsspezifische Entwicklung mathematischer Bedeutung). Gleichwohl darf man nicht verkennen, dass die Entwicklung subjektiver Vorstellungen stets eine eigene Dynamik besitzt, und dass diese nicht durch Sachlogik gesteuert wird. So muss die Vorstellung von einem offenen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht, in dem zeitlich parallel fachliche Inhalte aufgebaut werden und entsprechendes Lernen zwanglos stattfindet, wohl prinzipiell eine Illusion bleiben. MAIER & VOIGT (1989): „Was wir kritisieren, ist die Annahme, es gäbe einen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht, der sowohl von Seiten des Lehrers offen gestaltet wird und zugleich für die Schüler gradlinig zu den fachsystematisch erwarteten Zielen führt" (S. 91).

Das weiß oder spürt wohl auch der Lehrer, wenn er die offene Lehrerfrage auf den Beginn von Einführungsstunden beschränkt und im weiteren Verlauf, bei zunehmender Lenkung, die gedanklichen Schritte der Entwicklung enger werden lässt. Er zielt ja auf eine bestimmte Bezeichnung, einen bestimmten Merksatz oder ein Rechenergebnis. MAIER & VOIGT: „Kann man also in anfänglicher Offenheit der Episoden eine gewisse Entsprechung zum Prinzip der offenen Lehrerfrage sehen, so muss man für den weiteren Verlauf eher eine Ähnlichkeit mit der streng führenden Entwicklungsfrage feststellen. Der Lehrer möchte wohl den Denkwegen und subjektiven Vorstellungen der Schüler Raum geben, sieht sich dann aber unter Zugzwang, das Unterrichtsgespräch auf bestimmte erwartete Antworten hin zu verengen" (S. 86). Dies erreicht er z. B durch systematisches 'Überhören', Abblocken oder Ausgrenzen unerwünschter Schülerbeiträge, Überspielen von Divergenzen mit Hilfe von Suggestivfragen, Umdeuten von Schüleräußerungen im Sinne seiner Antworterwartung und zunehmendes Einstreuen eigener Erklärungen. Ohne Suggestivfragen, ohne das Vertrauen darauf, dass die Schüler im Versuch-Irrtum-Verfahren oder mittels lokaler Assoziationen Antworten produzieren, die dann der Lehrer seiner Erwartung entsprechend deutet oder verwendet, lässt sich das neue Wissen eben nicht erarbeiten.

b) Rahmenkonflikte und Rahmenmodulationen

KRUMMHEUER (1982) stützt sich bei seiner Analyse der unterrichtlichen Kommunikation auf die Begrifflichkeit von *Goffmans* „Rahmenanalyse". Danach interpretieren verschiedene Personen, welche die gleiche Situation wahrnehmen oder dem gleichen Ereignis beiwohnen, diese meist sehr unterschiedlich. Dies ist darauf zurückzuführen, dass menschliches Wahrnehmen und Erkennen offenbar nicht voraussetzungslos geschieht, sondern unter dem Einfluß kognitiver Voreinstellungen, die *Goffman* 'frameworks', 'schemata of interpretation', 'perspectives' oder 'background of understanding' nennt. KRUMMHEUER legt sich auf die Bezeichnung „Rahmen" fest. Ein

Rahmen stellt Grundsätze der Plausibilität und der Organisation bereit, die prägend für eine wahrgenommene Situation sind.

Bei der Anwendung des Rahmenkonzepts auf die Interaktion im Mathematikunterricht versieht KRUMMHEUER den Begriff zusätzlich mit einer inhaltlichen Komponente. So lässt sich z. B. die Gleichheit der Terme $2a+2b$ und $2(a+b)$ damit begründen, dass sie beide geeignete Ausdrücke zur Umfangsberechnung beim Rechteck sind, die nur von der Längengleichheit gegenüberliegender Seite in verschiedener Weise Gebrauch machen. Die Variablen a und b würden dann als Platzhalter für geometrische Größen (Seitenlängen eines Rechtecks) aufgefasst, und KRUMMHEUER spricht von einem „geometrisch-schulmathematischen Rahmen“. Eine andere Begründung wäre die Bezugnahme auf das so genannte Distributivgesetz, das die Zahlenoperationen Multiplikation und Addition miteinander verbindet. In diesem Fall vertreten die Variablen (reelle) Zahlen, über deren Beziehung zueinander eine allgemeine Aussage gemacht wird. Dies wäre nach KRUMMHEUER ein „algebraisch-didaktischer Rahmen“.

In vier Stunden zur Einführung der Schüler in den Termbegriff und die Termumformung in einer 8. Klasse ließen sich insgesamt vier verschiedene Rahmen eruieren, die generell zur Interpretation von Termen und Termgleichheit herangezogen wurden:

- Der „algebraisch-didaktische“ Rahmen repräsentiert eine mathematikdidaktisch aufbereitete Algebra der Terme und Termumformungen. „In ihm sind in mathematisch abgesicherter Weise die Begriffe ‘Term’, ‘Termumformung’, ‘Äquivalenz’ von Termen usw. definiert und die mathematischen Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen nachgewiesen“ (S. 91).
- „Der geometrisch-schulmathematische“ Rahmen für Terme beinhaltet derartige mathematische Theoriestücke, die benötigt werden, um aus geometrischen Problemstellungen algebraische Terme zu gewinnen“ (S. 91). Dieser Rahmen hat insofern eine sehr enge Verbindung zum algebraischen Rahmen, als sich geometrische Vorstellungen heranziehen lassen, um einen algebraischen Ausdruck zu interpretieren, und umgekehrt der arithmetische Ausdruck der Lösung geometrischer Aufgaben dienen kann.
- Schwieriger ist das zu beschreiben, was KRUMMHEUER einen „alltags-geometrischen“ Rahmen für Terme nennt. In ihn gehen zwar Erfahrungen ein, die Schüler etwa im Zusammenhang der Kommunikation einer Schülerarbeitsgruppe im Mathematikunterricht machen können. „Andererseits ist dieser Rahmen auch inhaltlich bestimmt. Er bezieht sich auf geo- und stereometrische Objekte, die auch im außerschulischen Alltag in Form konkreter Gegenstände vorhanden sind. Auf diese Weise fußt der Rahmen auf der aktualisierbaren Erfahrung des außerschulischen Alltags von Schülern“ (S. 91f). In einer gewissen Tätigkeitsorientierung enthält er Abfolgen durchzuführender Operationen, die der Lösung einer bestimmten Aufgabe dienen.
- „Auch der ‘algorithmisch-mechanische’ Rahmen ist spezifisch für Kommunikationsprozesse im Mathematikunterricht. Er fußt auf den Erfahrungen, dass im Mathematikunterricht eine Vielzahl von Aufgaben gestellt werden, zu deren Bewältigung ‘Techniken’ beherrscht werden müssen. Diese Techniken sind mathematischen Ursprungs (deswegen die Bezeichnung: ‘algorithmisch’). In diese Rahmen wird jedwede Problemstellung zu einer ‘Rechenaufgabe’ wie z. B. eine ‘Malaufgabe’, wenn an einer Stelle des Problems eine Multiplikation auftritt“ (S. 92).

In dem von KRUMMHEUER beobachteten Unterricht wurden die beiden zuerst genannten Rahmen vor allem von der Lehrperson eingenommen, die beiden zuletzt genannten von den Schülern. Allgemein kommt es aufgrund unterschiedlicher Rahmen, die die Lehrperson und verschiedene Schüler bei der Interpretation mathematischer Sachverhalte und Situationen zugrunde liegen, in der unterrichtlichen Kommunikation zu einem Wechselspiel und zu einem Ineinandergreifen der verschiedenen Rahmen. Von besonderer Bedeutung erscheinen „Rahmenkonflikte“, zwischen der Lehrperson und Schülern, die verschiedene Ursachen haben können, und die zum Teil latent schwelen, gelegentlich aber auch thematisiert werden.

Im beobachteten Unterricht versucht der Lehrer, die Schüler an den Termbegriff heranzuführen, indem er sie anleitet, zu geometrischen Situationen und Sachsituationen geeignete Berechnungsterme anzusetzen. So sollen sie zur Berechnung der Quaderoberfläche die Terme 2ab + 2bc + 2ac bzw. 2(ab + bc + ac) finden. Ein Schüler macht sich an dem gegebenen Pappmodell des Quaders sogleich an die Arbeit, misst die Seitenlängen der einzelnen Begrenzungsflächen ab und berechnet nacheinander ihren Inhalt. Er ist ganz und gar dem „alltagsgeometrischen" Rahmen verpflichtet und zunächst kaum zur Entwicklung einer allgemeinen Oberflächenformel zu bewegen. Als der Lehrer die Schüler an den Begriff der Äquivalenz von Termen heranzuführen versucht, indem er sie den Wert verschiedener, z. T. äquivalenter Terme nach Ersetzen der Variablen durch Zahlen anleitet, machen sich die Schüler zwar im Sinne des „algorithmisch-mechanischen" Rahmens mit Eifer an die Rechenarbeit, bleiben aber zunächst für den Vergleich der Terme blind.

Das Thematisieren solcher Rahmenkonflikte scheint nun der einzige viel versprechende Weg, die Schüler von ihren, dem Lernziel nicht gerecht werdenden Rahmen wegzuführen und zur Übernahme der vom Lehrer angestrebten Rahmen zu bewegen. Dieser Lernschritt wird in der Rahmungstheorie mit dem Begriff „Rahmenmodulation" beschrieben. Mit dem Begriff der Modulation werden Prozesse von Bedeutungsveränderungen benannt. So wäre auch der Wechsel von der Auffassung der Buchstaben *a*, *b* und *c* in einem Term als Seitenlängen von Rechtecken (geometrisch-mathematischer Rahmen) zur Auffassung dieser Buchstaben als Variablen im algebraischen Sinne eine solche Modulation, die auch dem methodischen Konzept des Lehrers im oben angedeuteten Unterricht zugrunde liegt.

VOIGT (1989) zeigt ein anderes Beispiel für einen Rahmenkonflikt im Mathematikunterricht. In einer ersten Grundschulklasse sollten 'Zahlensätze' anhand von Bildern erarbeitet werden, die mehrere gleichartige Objekte zeigten; z. B. der Satz 3 + 2 = 5 anhand eines Bildes, in dem 3 Vögel auf den Drähten einer Telefonleitung sitzen und weitere 2 Vögel in Richtung dieser Drähte fliegen. Manchmal fand ein Schüler sogleich den 'richtigen' Zahlensatz, die Lehrerin schrieb ihn an die Tafel und ging zur nächsten Aufgabe (zum nächsten Bild) über. VOIGT nennt das eine thematische Prozedur. Nun kam es aber auch vor, dass die Schüler das Bild anders deuteten als die Lehrerin; es trat ein Deutungskonflikt auf, der sich auch als Rahmenkonflikte in der Interaktion begreifen lässt. Vielleicht verstanden diese Schüler das Bild weniger, im Sinne der Lehrerin, als Darstellung eines mathematischen Zusammenhangs, sondern interpretierten es aufgrund ihrer primären lebensweltlichen Erfahrungen konkreter, dinglicher.

Solche Konflikte konnten durch geeignete Weisen des Umgangs miteinander und mit den Unterrichtsgegenständen stets rasch entschärft werden. Die Spannung zwischen den Rahmen der Lehrerin und denen der Schüler verringerten sich in dem Maß, in dem sich die konventionalisierten Aspekte der Mathematisierung ausbildeten; also, als z. B. die Schüler nach einiger Übung die Deutung des Hinzugebens als Hinweis auf die Addition verstanden. Es gelingt der Lehrerin, nach und nach gewisse Konventionen der Mathematisierung zu sichern und zu erreichen, dass die Schüler Veranschaulichungen im Sinne der von ihr gewünschten mathematischen Aussage entziffern. Es findet das statt, was KRUMMHEUER (1982) eine Rahmenmodulation nennt.

NETH & VOIGT (1991) bezeichnen die thematische Prozedur der routinierten Bearbeitungen eines Themas im Sinne der Stabilisierung von Konventionen als 'Vermathematisierung'. Sie fanden dieses Phänomen auch beim Lösen von Sachaufgaben vor, die in Textform gegeben sind. Um mit den Schülern das Ergänzen von 'gemischten Zehnerzahlen' zum jeweils nächsten vollen Zehner zu üben, schildert z. B. die Lehrerin einer zweiten Klasse die Szene eines Kindes, das in einem Schaufenster einen Ball zum Preis von 30 DM sieht, den es kaufen möchte, obwohl es in seiner Sparbüchse nur 24 DM vorfindet. Noch ehe sie die eigentliche Frage stellen kann, äußern sich einige Schüler spontan zu dieser Situation, indem sie etwa über ihre eigenen Ersparnisse oder ähnliches berichten. Sie werden aber zur Ordnung gerufen und sogleich mit der Frage konfrontiert, was denn das Kind vor dem Schaufenster wohl überlegen würde. Erwartet wird natürlich die Antwort, wie viel Geld dem Kind vom Ersparten zum Preis des Balles fehle, und diese soll zu der ‘Rechengeschichte’ 24 + ? = 30 führen. Doch erneut äußern einige Schüler ganz andere Ideen, etwa wie das Kind mit Hilfe der Oma oder der Eltern (mittels guter Noten) zu weiterem Geld kommen könne, usw. Nach kurzer Zeit stellt die Lehrerin selbst die Frage „Wieviel fehlt denn eigentlich noch?“, um nach der Antwort „6 Mark“ die Instruktion zu geben: „Wer kann das Zahlensätzchen dazu aufschreiben?“ Schließlich wird „24 DM + 6 DM = 30 DM“ an die Tafel notiert (S. 94). NETH & VOIGT beschreiben diese thematische Prozedur so (S. 97):

- „Das Thema setzt an der Lebenswelt der Schüler an und endet in einer formalen mathematischen Aussage. Die Mehrdeutigkeit der Sache wird auf eine Rechnung reduziert, die an der Tafel offizielle Verbindlichkeit erhält.
- Während die Schüler lokal auch alternative Mathematisierungsangebote machen, lenkt die Lehrerin das Thema auf einen bestimmten Typ von Rechenaufgabe hin. Dem sachbezogenen, phantasiereichen Problembewußtsein der Schüler stehen didaktisch-methodisch gerahmte Konzentrationen auf Seiten der Lehrerin gegenüber.
- Die von der Lehrerin intendierte Mathematisierung der Sachsituation geschieht in einzelnen Schritten, wobei Teilen der Sache nacheinander bestimmte mathematische Zeichen auf der Tafel zugeordnete werden.“

c) Schülerverstehen im fragend-entwickelnden Mathematikunterricht

MAIER (1995) zeigt, nach welchen Kriterien das Verstehen der Schüler im Rahmen des fragend-entwickelnden Unterrichts evaluiert werden kann. Als Hauptkriterium nennt er das „unterrichtliche Sinnangebot“. Wenn nämlich der Schüler im Unterricht durch Konstruktion von Bedeutung ein möglichst reichhaltiges Verstehen erreichen soll, so braucht er dazu adäquate Anstöße, die zumeist vom Lehrer ausgehen, aber auch von Mitschülern kommen können. Die Evaluation fragt dann, in welcher Weise solche unterrichtlichen Sinnangebote bei einem einzelnen Schüler Verstehensprozesse angestoßen haben und von welcher Art die Verstehensprodukte sind, die auf diese Weise generiert wurden. Bei der Analyse von Transkripten alltäglichen Mathematikunterrichts und der im unmittelbaren Anschluss an die Stunden durchgeführten Schülerinterviews im Rahmen des VIMU-Projekts konnten verschiedene Formen der Verarbeitung des Sinnangebots durch die Schüler unterschieden werden:

- In sehr seltenen Fällen gab ein Schüler Sinnangebote in gleichem Umfang und in gleicher Gestalt, wie sie vorausgehend im Unterricht dargeboten wurden, gewissermaßen nach Art eines Ton- oder Videobandes, wörtlich wieder. Im Fall einer solchen Reproduktion wurden Verstehensprozesse als analytisch nicht fassbar eingestuft. Die Attribution von Verstehen setzt bei diesem Untersuchungsansatz voraus, dass die im Unterricht generierten thematischen Sinnelemente vom Schüler in irgendeiner Form 'bearbeitet' werden und sich dieser individuelle Bearbeitungsprozess auch in seiner sprachlichen Äußerung zeigt.
- Die einfachste Form der Bearbeitung war die Rekonstruktion. Hier ließ der Verstehende ein Sinnangebot, das in der unterrichtlichen Kommunikation geschaffen wurde, im nachfolgenden Interview in allen inhaltlichen Aspekten wiedererstehen. Er verwendete dabei allerdings seine eigenen Worte bzw. Darstellungen, und diese unterschieden sich von den Darstellungen in der Ursprungssituation. Verstehen dokumentierte sich hier in der Form einer individuell geformten Paraphrase, welche die im vorgegebenen Sinnangebot repräsentierten Bedeutungen quantitativ und qualitativ vollinhaltlich zum Ausdruck brachte, diese also nach Inhalt und Zusammenhang unverändert ließ. Bei einer getreuen Rekonstruktion wird man im Allgemeinen von erfolgreichem Verstehen sprechen, auch wenn die Verstehensprodukte gegen einige – etwa in der Lehrerintention erkennbare mathematische Evaluationskriterien – verstoßen.
- Freilich kam auch rekonstruierendes Verstehen eher selten vor. Zumeist ging die 'Bearbeitung', die ein Lernender in seiner subjektiven Konstruktion an den Sinnangeboten vornahm, weiter. Er verkürzte, modifizierte,

ergänzte oder erweiterte diese Angebote; kurz, er veränderte sie quantitativ oder qualitativ in einer Weise, die sich mit ihrem ursprünglichen Gehalt und Zusammenhang nur noch teilweise oder gar nicht mehr deckte. Im Einzelnen ließen sich bezüglich dieser Form zwei Arten von Verstehen unterscheiden: das reduktive und das abduktive Verstehen.

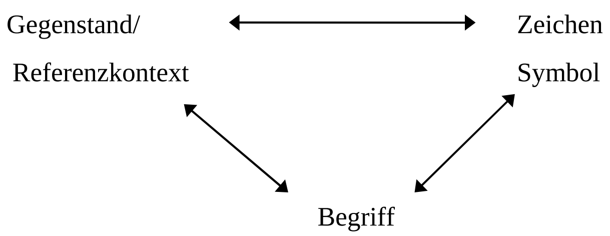
– Beim reduktiven Verstehen wurde das Sinnangebot in irgendeiner Weise qualitativ oder quantitativ verkürzt oder gemindert. Die Verkürzung oder Minderung konnte zum ersten isolierte Bedeutungsinhalte wie Begriffe, Verfahren oder einzelne Beziehungen betreffen, und zwar deren quantitativen Umfang wie deren qualitativen Gehalt (inhaltliche Reduktion). Der Schüler ließ etwa in dem von ihm generierten Verstehensprodukt Bedeutungsinhalte des Sinnangebots weg, d. h. er verkürzte dieses quantitativ; oder er entleerte Begriffe und Beziehungen ihres Vorstellungsgehalts, d. h. er dekontextualisierte sie und realisierte im Angebot begründet ausgeführte Verfahren rein mechanisch. Die Verkürzung bzw. Minderung konnte Bedeutungszusammenhänge, wie z. B. Beziehungen zwischen Begriffen und Sätzen oder die Verknüpfung von Verfahrensschritten betreffen (strukturelle Reduktion). So etwa, wenn ein Schüler solche Zusammenhänge auflöste und die Teile des Zusammenhangs nur noch isoliert betrachtete, also den Gegenstand fraktionierte, wenn er die Teile des Zusammenhangs miteinander vermengte, also Interferenzen bildete, oder wenn er, globalisierend, strukturell relevante Einzelheiten wegließ. Schließlich konnte sich die Verkürzung oder Minderung auf die Darstellungsdimension beziehen (modale Reduktion); der Schüler verkürzte z. B. ein intermodales Angebot auf eine nur sprachlich-symbolische oder eine nur anschaulich-modellgebundene Darstellung (syntaxreduziertes bzw. modellreduziertes Verstehen).
– Beim abduktiven Verstehen gab der Schüler einem unterrichtlichen Sinnangebot seine eigene, subjektiv gefärbte Prägung oder fügte ihm aus dem Vorrat eigenen Wissens bzw. verfügbarer Verstehensprodukte in qualitativer oder auch quantitativer Weise noch etwas hinzu. Falls die Modifikation bzw. Erweiterung die Bedeutungsinhalte betraf, legte sich der Schüler z. B. eigene Begriffsvorstellungen oder Aussagen zurecht, handelte also 'theoriebildend'; er leitete aus Einzelbeobachtungen selbständig Regeln und Gesetze ab, handelte damit generalisierend oder übergeneralisierend, oder er bildete für das Lösen von Aufgaben- oder Problemen eigene Formen und Muster aus und handelte ‘strategisierend’ (inhaltliche Abduktion). Falls die Modifikation oder Erweiterung auf Bedeutungszusammenhänge betraf, stellte der Schüler z. B. solche strukturellen Beziehungen selbst her, synthetisierte oder ergänzte im Angebot vorgegebene Zusammenhänge um strukturverträglich Einzelheiten, er differenzierte oder fasste weniger relevante Einzelheiten unter übergeordneten Gesichtspunkten zusammen, um so die Komplexität zu reduzieren (strukturelle Abduktion). In der modalen Dimension bedeutete die Abduktion entweder den Übergang von einer rein modellgebundenen oder interaktiven zu einer sprachlich-symbolischer Darstellung, der Schüler abstrahierte oder mathematisierte, oder umgekehrt einen Übergang von rein sprachlich-symbolischer Darstellung zu interaktiver oder anschaulicher Darstellung, d. h. der Schüler konkretisierte oder exemplifizierte (modale Abduktion).

STEINBRING (in MAIER & STEINBRING, im Druck) geht davon aus, dass die Konstruktion mathematischen Wissens und mathematischer Bedeutung im Rahmen der Etablierung von Beziehungen und Strukturen zwischen Zeichen (Symbolen, Diagrammen, Operationszeichen usw.) und Objekten bzw. Referenzbereichen geschieht. Eine „epistemologische“ Evaluation des Schülerverstehens versucht herauszufinden, „wie sich Begriffe oder neue Bedeutungen mathematischen Wissens entwickelt haben, welche epistemologischen Hindernisse auftraten, wie und ob diese ‘überwunden’ werden konnten, oder wie in der mathematischen Community eine Balance zwischen inhaltlichen und konventionellen Aspekten mathematischen Wissens hergestellt wurde“.

Zu den Strukturen schulmathematischen Wissens gehören Bedingungen des mathematischen Wissens selbst sowie die in der Lehr-Lern-Situation wirksamen und für sie konstitutiven sozialen und individuellen Aspekte.

> „In der qualitativen, epistemologischen Analyse des schulmathematischen Wissens wird dieses Spannungsfeld zwischen den sozial-historisch gegebenen Strukturen des mathematischen Wissens und den besonderen sozialen Rahmenbedingungen (von Unterricht und Lernen) untersucht und beschrieben, und zwar insbesondere mit Blick auf die Vielfalt und die Bedingungen bei der Konstitution von Beziehungen zwischen Zeichen/Symbol und Referenten in mathematischen Lehr-Lern-Situationen“.

STEINBRING verwendet dementsprechend ein „epistemologisches Dreieck“ als zentrales Instrument der Beschreibung und der Analyse von mathematischem Wissen:



Dieses weist auf die besondere Wechselbeziehung zwischen den Zeichen/ Symbolen und dem Gegenstand bzw. Referenzkontext hin, die die interaktive Konstitution mathematischen Wissens in unterrichtlichen Lehr-Lern-Prozessen charakterisiert. Wichtig erscheint, dass der Referenzkontext, bzw. der Gegenstand nicht vorab eindeutig vorgegeben ist, sondern erst im Verlaufe der Entwicklung des mathematischen Wissens durch Umdeutung nach und nach in seinen strukturellen Zusammenhang entwickelt wird. Mathematische Bedeutungen werden im Wechselspiel zwischen einem Referenzkontext und einem Zeichensystem entwickelt, indem von einem relativ vertrauten oder teilweise bekannten Referenzbereich mögliche Bedeutungen auf ein neues, noch bedeutungsloses Zeichensystem übertragen werden. Mathematisches Verstehen heißt dann, Zeichen/Symbole zu deuten, d. h. einen Bezug zwischen ihnen und einem Gegenstand bzw. Referenzkontext herzustellen. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen:

- explizit oder implizit, d. h. die Beziehung kann direkt ausgesprochen bzw. durch Zeigen oder aber nur durch den interaktiven Kontext/Rahmen ‘stillschweigend anwesend’ sein;
- individuell oder interaktiv, d. h. sie kann von einzelnen Personen hergestellt oder interaktiv konstituiert sein.

Mit seiner Evaluationstheorie kommt STEINBRING bei deren Anwendung in der Analyse alltäglichen Mathematikunterrichts bezüglich des Schülerverstehens zu ähnlich ungünstigen Ergebnissen wie MAIER. Diese Untersuchungen lassen wichtige Fragen offen. Liegt das an der Form des fragend-entwickelnden Unterrichts als solcher oder an der Art seiner Gestaltung? Sind Verbesserungen möglich und von welcher Art könnten sie sein?

3.3 Unterrichtsformen zur Förderung des Sprachverstehens und der sprachlichen Produktivität

Im vorausgehenden Abschnitt wurde ausführlich gezeigt, dass der fragend-entwickelnde (gemeinsam erarbeitende) Mathematikunterricht zumindest in der gegenwärtig praktizierten und dominierenden Form kaum in der Lage ist, bei den Schülern ein von Verstehen geprägtes mathematisches Wissen aufzubauen und die vorausgehend formulierten Ziele und Aufgaben der Sprachförderung zu erreichen. Es gilt nach Formen der Unterrichtsorganisation und Unterrichtsgestaltung zu suchen, die bessere Gelegenheiten zur Förderung der sprachlichen Produktivität und des Sprachverstehens bei den Schülern bieten und mehr mathematischen Lernerfolg versprechen. In der Literatur gibt es Vorschläge dafür, den fragend-entwickelnden Mathematikunterricht so zu verbessern, dass er diesen Zielen besser gerecht werden kann (3.3.1). Vor allem in der englischsprachigen Literatur ist viel von Diskussion die Rede; es soll geprüft werden, was darunter im Sinne der Sprachförderung verstanden werden kann (3.3.2). Eine wirksame Möglichkeit, das Gespräch unter Schülern effektiv zu gestalten, bietet die Arbeit in Kleingruppen (3.3.3). Aber auch der Lehrervortrag bzw. die Lehrerdarbietung soll auf ihre Eignung zum Erreichen der genannten Ziele hin analysiert werden (3.3.4).

3.3.1 Verbesserung des fragend-entwickelnden Mathematikunterrichts

The Mathematical Association (1987) geht von dem Gedanken aus, dass mündliche Sprachfähigkeiten im Fach Mathematik genauso bedeutsam sind wie in anderen Lernbereichen des Unterrichts. Zeichnet man aber die Sprachbeiträge der Schüler im Mathematikunterricht auf Tonband oder Videoband auf und verschriftet sie, so erkennt man viele Situationen, in denen nur der Lehrer spricht oder die Schüler darauf beschränkt sind, Lücken in Lehrersätzen auszufüllen. Diese Situation lässt sich durch gezielte Anlässe zu zusammenhängenden Sprachäußerungen verbessern, wobei dann mathematische Fachwörter in behutsamer Weise einzuführen sind.

Spontanes Sprechen erwächst vor allem aus Tätigkeiten oder wenn Schüler über ihre mathematischen Aktivitäten berichten. Es gilt Situationen zu schaffen, in denen die Schüler die Notwendigkeit zum zusammenhängenden Sprechen verspüren. Der Lehrer muss seine Rolle in der unterrichtlichen Interaktion ändern; vor allem muss er bereit sein, Schülerbeiträge konstruktiv aufzunehmen und sich dabei als guter Zuhörer zu erweisen. Stummes Hören kann oft wichtiger sein als das Bemühen, Sprachbeiträge der Schüler zu stimulieren. Die von den Schülern gewählte Sprache muss akzeptiert werden; sie ist nicht zuletzt ein wichtiger Indikator für den Lernfortschritt.

Auch SULLIVAN & CLARK (1988) beschäftigen sich mit der Frage, wie man im Mathematikunterricht günstigere Sprachsituationen schaffen kann, als sie im üblichen fragend-entwickelnden Verfahren geboten werden. Ihre Lösung, die sie an Beispielen exemplifizieren, ist: Der Lehrer muss bessere Fragen bzw. Aufgaben stellen, und diese haben folgende drei Eigenschaften:

– Sie verlangen mehr als ein bloßes Wiederholen von Fakten oder das Reproduzieren einer Fähigkeit.
– Sie fordern von den Schülern Versuche, bei denen jeder Erfolgsaussichten hat und die dem Lehrer Schwierigkeiten und begriffliche Fehlvorstellungen seiner Schüler enthüllen können.
– Sie sind offen für mehrere verschiedene Antworten bzw. Lösungen.

BARTOLINI-BUSSI (1992) leitet seit Jahren ein Projekt der Handlungsforschung mit dem Titel ‘Mathematical Discussion in Primary School’, „that aims at eliciting limits and potentialities of teacher-orchestrated whole class discussion for the learning of mathematics at primary school level“ (S. 1). Man kann von dem Versuch sprechen, in Zusammenarbeit mit Lehrern den fragend-entwickelnden Unterricht so weiterzuentwickeln bzw. zu verbessern, dass die Schüler dabei bessere Lernergebnisse erzielen. Wichtigste Form sind lehrergeleitete Diskussionen zu komplexeren Problemen, die von den Schülern nicht allein gelöst werden können. Aufgrund von interpretativen Analysen der aufgezeichneten und transkribierten Gespräche, die gleichermaßen den Interaktionsprozess wie den Lerngegenstand zu erfassen versuchen, werden Unzulänglichkeiten aufgespürt, Veränderungen geplant und auf ihre Wirkung hin geprüft. Bisher wurden zwei Strategien zur Optimierung des Lernerfolgs herausgearbeitet.

Die eine Strategie soll das wenig effektive direkte und rhetorische Fragen sowie das Anfangen von Sätzen durch den Lehrer, die von den Schülern vollendet werden sollen, ablösen; sie heißt „mirroring or echoing; that is repeating a pupil’s utterance without any explicit evaluation and with a possible partial changement of formulation“ (S. 8). Dabei werden verschiedene Arten von ‘mirroring’ unterschieden: Genaues Wiederholen des Gesagten (‘echoing’), Wiederholen einiger aufeinander folgender Äußerungen, verbunden mit einer Zusammenfassung des Gedankengangs (‘mirroring and summing up’) und Wiederholen einer Äußerung verbunden mit einer kleinen Hilfe zum Fortfahren (‘mirroring with additional information’). Dadurch, dass er geäußerte Gedanken an den Schüler selbst zurückspielt, gibt ihm der Lehrer Gelegenheit, eigene Ideen von anderen formuliert zu hören, auf diese Art Abstand von ihnen zu gewinnen und sie zu objektivieren, ohne dass ihm von außen her Normen oder Lösungen vorgegeben würden.

Eine zweite Strategie zielt auf einen Übergang zu dem, was BARTOLINI-BUSSI (1992) „theoretisches Denken“ nennt. Beispielsweise entschließt sich der Lehrer, dadurch vom „empirischen“ zum „theoretischen Denken“ überzuleiten, dass er die Analyse gemeinsamer Erfahrungen der Schüler hervorhebt und allgemeine Beziehungen zwischen den Gegenständen herausarbeitet. Den Übergang kann er mit verschiedenen Operationen ins Werk zu setzen versuchen; geeignet ist „for instance direct solicitation of paraphrasing pupils’ utterances on a theoretical level“ (S. 13). In diesem Fall werden Schüleräußerungen mit Blick auf ein theoretisches Niveau zurückgespielt und in Richtung mathematisch bedeutungsvoller Erfahrungen generalisierend paraphrasiert.

Nach Meinung von KANE (1992) muss vor allem der negativen Wirkung des von *Bauersfeld* beschriebenen Trichtermusters im fragend-entwickelnden Mathematikunterricht entgegengewirkt werden. Daher sollte sich der Lehrer eines anderen Interaktionsmusters bedienen, das er - im Gegensatz zum „funnel pattern“ - „focusing pattern“ nennt. Dabei gilt es eine Situation zu schaffen, in der Schüler ihr mathematisches Wissen und mathematische Bedeutungen tatsächlich selbst konstruieren können. Sie sollten Gelegenheit haben, über mathematische Fragen und Probleme nachzudenken, selbst Lösungen für sie zu finden und ihre Ideen mit anderen Schülern zu diskutieren. Dies verlangt vom Lehrer allerdings, dass er die Gedanken der Schüler ernst nimmt und deren Ideen akzeptiert. Seine eigenen Beiträge müssen sich auf „Meta-Kommentare“ beschränken, die als Versuch zu verstehen sind, das Gespräch auf bestimmte Punkte zu lenken und von den Schülern gefundene zentrale Ideen festzuhalten. „As a pattern of interaction focusing differs from funnelling in that it allows the teacher to direct the child’s explanation back to the point at which the solution strategy is unique. The focusing questions of the teacher does act to direct students attention to the salient features of a solution, but also allows students the opportunity to make sense of the strategy for themselves“ (S. 10 f).

3.3.2 Diskussion im Mathematikunterricht

Das englische Wort *discussion* meint bei BARTOLINI-BUSSI (1992) nichts anderes als eine modifizierte Variante des fragend-entwickelnden Unterrichts. Der üblichen Bedeutung des entsprechenden deutschen Wortes kommen Untersuchungen näher, die damit eine stärker schülerzentrierte Gesprächssituation im Auge haben.

The Mathematical Association (1987) meint, das Klassengespräch sollte nicht immer lehrergeleitet sein und sich auch nicht immer nur zwischen Lehrer und Schülern abspielen. Wenn der Lehrer ein ermutigendes und von Aufmerksamkeit geprägtes Klassenklima zu schaffen vermag, gelingen auch Diskussionen zwischen den Schülern. In zahlreichen praktischen Beispielen werden Schülergespräche dokumentiert, die durch mathematische Untersuchungen veranlasst sind und sich auf alle Stoffgebiete des Lehrplans erstrecken. Nicht zuletzt geben Situationen aus der Umwelt, der modernen Technik und aus der Welt von Spiel und Sport sowie mathematische Lernspiele gute Anlässe für Diskussionen zwischen den Schülern.

DUFFIN (1986) versucht an eindrucksvollen Beispielen zu zeigen, wie fruchtbar Schüler über Mathematik kommunizieren können, wenn sie sich nicht im Rahmen des fragend-entwickelnden Unterrichts äußern, wo sie nur zu raten versuchen, was der Lehrer mit seiner Frage meint und als Antwort zu hören wünscht, und wo der Lehrer dazu neigt, jede Antwort zu verwerfen, die nicht mit seinen Intentionen in Einklang ist. Fruchtbare sprachliche Aktivitäten werden angeregt, wenn sich Schüler im Zusammenhang mit konkreten oder zeichnerischen Tätigkeiten wie etwa mit dem Einwickeln eines Zylinders (mit Papier) oder mit der zeichnerischen Lösung der Aufgabe der Oberflächenberechnung für den Zylinder äußern. Sprachförderung verlangt nach sinnvollen Situationen, die verbale Aktivitäten anregen, eine sorgfältige Auswahl von beantwortbaren Fragen bzw. Aufgaben und die Bereitschaft der Klasse, allen Beiträgen der anderen zuzuhören und sie zu akzeptieren.

Auch PIRIE (1991) beschäftigt sich mit einer Form der Diskussion, in der sich der Lehrer stark zurücknimmt und nur noch moderierend wirkt. Es scheint ihr sicher, dass diese dem Lehrer gute Einblicke in das Denken der Schülers gibt (siehe PIMM 1987). Aber inwieweit kann sie auch das mathematische Verstehen fördern? In der Literatur wird diese Art der Diskussion als „Werkzeug der sprachlichen Förderung“ (*Flower*) beschrieben. Sie wecke Interesse und Freude am Lernen (*Harvey*) und stelle ein Übungsfeld für klares und logisches Denken dar (*Ur*). Aber solche Aussagen stellen keine direkte Beziehung zwischen Sprache und Verstehen her. Nach Meinung von PIRIE muss klar unterschieden werden zwischen der Annahme, dass der Gebrauch der gesprochenen Sprache das mathematische Verstehen fördert, und der, dass die Mathematik von sich aus den Gebrauch der Sprache schärfe.

Ihre eigene Untersuchung bezieht sich auf den Unterricht von vier Lehrern der Sekundarstufe, die die Diskussion bewußt und absichtlich als Bestandteil ihres Unterrichtsstils verwenden (siehe auch PIRIE & SCHWARZENBERGER 1988). Sie will Elemente der verbalen Interaktion festhalten, die auf irgendeine Weise als effektiv für mathematisches Lernen erscheinen, und die den folgenden Kriterien für eine Diskussion entsprechen:

– Die Rede muss einen bestimmten Zweck verfolgen, d. h. wohl definierte Ziele haben und explizit oder implizit von den Gruppenmitgliedern aufgenommen werden, an die sie gerichtet ist.
– Es muss eigenständige Beiträge von Seiten der Schüler geben, d. h. solche, die die Interaktion tatsächlich voran bringen.
– Es muss wirkliche Interaktion stattfinden, d. h. die Sprachbeiträge einzelner müssen durch die andere Schüler aufgegriffen werden.

Mit Hilfe der Analyse von Transkripten solcher Unterrichtsepisoden sollen Gesichtspunkte zur Beurteilung des Wertes von Diskussionen herausgearbeitet werden. Zwar zeigen die Diskussionen durchaus einen kohärenten Gedankenaustausch zwischen den Teilnehmern; sie kommen aber manchmal zu einem irrigen Verständnis von mathematischen Begriffen und vor allem von Bedeutungen fachsprachlicher Bezeichnungen. Es besteht die Gefahr, dass solches Missverstehen die Kommunikation mit Nicht-Beteiligten zusammenbrechen lässt. Nur wenige Gesprächsteilnehmer sprechen in vollständigen, grammatikalisch korrekt konstruierten Sätzen. Sie weichen der mathematischen Sprache aus und spicken ihre Äußerung mit unpräzisen Hinweisen und Bemerkungen wie „dieses“ „das da“ und „dort“.

PIRIE meint zwar, dass die Unfähigkeit der Schüler, klar über Mathematik zu sprechen, nicht mit der Unfähigkeit verknüpft sein muss, mathematisch zu handeln oder zu verstehen, und dass ein reduzierter Gebrauch von Fachwörtern nicht notwendig ein Indikator für die Unfähigkeit sein muss, mathematisch zu denken. Doch handelt es sich dabei nur um Mutmaßungen und sie räumt selbst ein, dass das Ergebnis ihrer Analysen nicht als Nachweis für die Annahme gesehen werden kann, dass die schülerzentrierte Diskussion als solche geeignet ist, das mathematische Verstehen und die fachsprachliche Kompetenz der Schüler zu fördern.

BRISSENDEN (1980) grenzt die mathematische Diskussion vom üblichen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht mit folgender Definition ab: „We expect some interaction between the pupils to occur, and we expect the various aspects of the mathematical activity to be open to everyone, rather than teacher and pupils having clearly defined parts“ (S. 74). Die Zusammenarbeit im Rahmen einer Diskussion gibt den Schülern sowohl das Vertrauen wie auch die Fähigkeit, eigenständig zu arbeiten.

Wichtige Grundlage für Diskussionen sind, BRISSENDEN zufolge, mathematische Situationen, die Felder möglicher Aktivität eröffnen. Sie können das Beiziehen eines Modells oder einer Anschauungshilfe einschließen. Wichtig ist, dass sie eine Quelle von Fragen darstellen, deren Beantwortung mathematisches Tun erforderlich macht. Als selbst erprobte Beispiele nennt er „Die Autoreise“, „Geburtstags- und Rugby-Tabellen“, „Flächeninhalt des Trapez“, „Geschwindigkeit und Weg-Zeit-Graphen“. Durch Sprechen, Handeln und Zuhören wird der

Prozess des Aufbaus und der Prüfung von Ideen unterstützt. Denn Schüler bauen Ideen auf, indem sie über eine Frage nachdenken, Materialien manipulieren oder sich an einem Gespräch beteiligen.

Gelingt es dem Lehrer, seine Rolle in der unterrichtlichen Interaktion zu ändern, dann kann eine mathematische Diskussion folgende charakteristische Merkmale annehmen: Die Teilnehmer sprechen zueinander und hören einander zu, und zwar als gleichberechtigte Partner. Der Gruppenleiter hat die Aufgabe, das Gespräch zu ermutigen und zu ordnen, nicht es zu steuern. Die Teilnehmer am Gespräch hören auf das, was tatsächlich gesagt wird, und zwar nicht mit einer im Voraus konstruierten Menge idealer Antworten im Kopf. Die verschiedenen Formen mathematischer Aktivitäten sind nach Möglichkeit zur Teilnahme für alle offen und es gibt keine klare Arbeitsteilung zwischen dem Lehrer und den Schülern. In seiner Rolle als Experte kann dieser allerdings provozierende und hilfreiche Fragen stellen, Elemente der mathematischen Sprache einführen, die Aufmerksamkeit auf bedeutsame Ideen lenken und deren Prüfung empfehlen. Verlaufssteuernd hebt er Schülerideen hervor, führt Schülerantworten weiter, bestätigt Gedankenentwicklungen, ermutigt und unterstützt die Beteiligung einzelner Schüler am Gespräch.

Als typisch sieht BRISSENDEN einen Unterrichtsablauf an, der mit einer Lehrerfrage bzw. einer Aufgabe im Klassenunterricht beginnt, dann zu Einzelarbeit oder zur Diskussion in Kleingruppen übergeht und nach einem Ideenaustausch in der Klasse zu einer neuen Fragestellung fortschreitet. Dabei wächst die mathematische Diskussion in der Kleingruppe aus der Diskussion im Klassenverband heraus und mündet ihrerseits wieder in eine solche ein. Auch für die Kleingruppenarbeit wird sich der Lehrer darauf beschränken, wirksame mathematische Situationen zu planen, die Arbeit der Schüler genau zu beobachten, zuzuhören, in geeigneter Weise zu intervenieren und das Denken der Schüler in Gang zu halten.

3.3.3 Kleingruppengespräch im Mathematikunterricht

Das Gespräch zwischen Partnern oder Kleingruppen im Rahmen der gemeinsamen Bearbeitung mathematischer Aufgaben, der Lösung mathematischer Probleme, der Durchführung eines Experiments, der Formulierung eines Berichts, oder einer Argumentation bzw. eines Beweises ist zwar über weite Strecken – abgesehen von den Phasen, in denen sich der Lehrer bei seiner Betreuung mit einer der Gruppen beschäftigt – der Lehrerkontrolle entzogen. Gleichwohl sollte man die Bedeutung dieses Gesprächs für die Sprachförderung nicht unterschätzen. Gerade die Abwesenheit der Kontrolle kann manchen Schüler ermuntern, sich unbefangen zu artikulieren und seine Gedanken in das Gruppengespräch einzubringen. Jedenfalls kann die Gruppenarbeit die zusammenhängende sprachliche Darstellung mathematischer Sachverhalte fördern (siehe RIEHL 1991).

BARNES & TODD (1977) zeigen auf, wie sich die Partner in einer Gruppenarbeit durch den Gedankenaustausch im Dialogs wechselseitig unterstützen: „By taking the trouble to elicit an opinion from someone else, or by utilizing what has been said by extending it further, the group members ascribe meaningfulness to one another's attempts to make sense of the world. This helps them to continue, however hesitantly, with the attempts to shape their own understanding by talking...“ (S. 36). Das Aufnehmen und Erweitern von Ideen und Lösungsbemühungen anderer bestätigen, dass der Schüler der Arbeit seiner Partner Bedeutung zuschreibt. Das Gespräch in der Arbeitsgruppe kann Gelegenheiten dafür schaffen, dass die Schüler nicht nur lernen, wenn sie selbst etwas erklären, sondern auch, wenn sie den Erklärungen ihrer Partner zuhören und einen Rahmen zu entwickeln versuchen, in dem ihre eigenen Konstruktionen und die Partnererklärungen in gleicher Weise Sinn machen.

Freilich darf man nicht davon ausgehen, dass gelingende und fruchtbare Gespräche in der Gruppe eine Selbstverständlichkeit seien. Es gilt, nach und nach eine angemessene Gesprächskultur zu entwickeln. Deren wichtigste Merkmale könnten die folgenden sein:

- Alle Mitglieder der Gruppe sind regelmäßig in das Gespräch einzubinden. Kein Schüler darf die Rolle des schweigenden Zuhörers einnehmen, und kein Schüler darf das Gruppengespräch dominieren.
- Gesprächsbeiträge anderer Teilnehmer sind möglichst aufmerksam zu verfolgen und schweigend anzuhören, bis sie beendet sind. Jeder bemüht sich intensiv, den Gedanken seiner Gesprächspartner in deren Sinn zu verstehen. Wer sich in einem eigenen Beitrag auf einen anderen zu beziehen wünscht, ist aufgefordert, diesen zu wiederholen („Du hast soeben gesagt, ... ich meine aber, ...“).
- Eigene Gesprächsbeiträge sind genau und sorgfältig so zu formulieren, so dass die übrigen Teilnehmer sie leicht auffassen und im gemeinten Sinne verstehen können; es muss alles versucht werden, überzeugend zu argumentieren.
- Der eigenen Meinung oder Position widersprechende oder entgegenstehende Argumente anderer Gruppenmitglieder sind mit Umsicht zu behandeln und, falls nötig, sachlich und nicht persönlich zu kritisieren. Dabei gilt die Regel: Zuerst überlegen, dann reden.

Im Übrigen müssen Schülergruppen lernen, Lehrerinstruktionen für die Gruppenarbeit aufmerksam zu lesen und sie vor Eintritt in die Bearbeitung je einzeln mit eigenen Worten wiederholen. In Kleingruppen von mehr als zwei Schülern muss ein Teilnehmer das Gespräch moderieren und ein anderer durch Notizen die anschließende Erstellung eines Ergebnisberichts vorbereiten. Dieser Bericht muss gemeinsam diskutiert und ggf. von einem dritten Schüler vorgetragen werden (siehe auch HOYLES 1985).

Mit verschiedensten Problemen dieser unterrichtlichen Sozialform setzt sich CIVIL (1992) in ihrer Untersuchung zu Kleingruppengesprächen im Mathematikunterricht auseinander, die sie mit ihrer Lehrerstudenten (angehenden Grundschullehrern) durchführte. Zentrale Ergebnisse seien nachfolgend in Zitaten vorgestellt:

(1) „What takes place when students are encouraged to talk about a mathematics problem? ... How does the task affect the discussion? One of my original goals in this study was to look at students’ explanation. One problem that I was not able to solve to my satisfaction was to develop tasks that would ‘force’ students to produce explanations? Sometimes, the tasks themselves were not appropriate. But another obstacle is: what is an explanation? What is a description? I was looking for why’s, the students would often give the how’s, and in quite a few cases, they thought that they were explaining. It is worth noting that as the course evolved, some students started remarking *but we are not saying why, we still are not saying why*“ (S. 20).

(2) What about preciseness (or lack of) in the students’ talk? How ‘incorrect’ and careless should one allow things to get for the sake of communication? ... I think that a command of the language of mathematics (including the symbolism) would facilitate the students’ expression of ideas. But, a drawback is that students’ efforts at producing mathematical sounding statements because they believe that this is what they are supposed to do can result in a loss of the mathematics content they are trying to word on... What is the relationship (if only) between ownership of an idea and use of language? In some of the transcripts of the group discussions I could see that as the problem became clearer in an student’s mind, her talk seemed to also become clearer. Yet, I am unsure about how to document this process, if there is really such a process“ (S. 21).

(3) How do diagrams and manipulatives fit in the process of communicating mathematics? ... On the revised version of the division task, I had to insist that they use pictures, because they did not seem to be getting anywhere. The dialogue between Joyce and Betsy given in page 8 comes after they actually drew it out for smaller numbers and then ‘saw it’. Ann on the ‘mile problem’ (...) solved it correctly once she drew it out. The base problem (in which base is $(204)_{?} = (76)_{ten}$) was successfully solved by Vicky who kept making reference to the chips... I was left with the impression that they did not seem to view these visual devices as a means to do mathematics, to solve a problem, but rather as an illustration of the answer (and perhaps something that they had to do because I asked them to ‘illustrate’)“ (S. 22).

(4) What did the students take away with them from this emphasis on talking about mathematics? Through their journal entries and interviews. I gathered that they liked the flexibility, the relaxed atmosphere, the fact that by sharing their ideas they were finding out different ways to go about a problem. By observing them at work, discussing a mathematics problem. I was impressed by how involved they could get. Most of them appeared to be enjoying doing mathematics. In teaching the course this way, one of my goals was to give them a model for their future teaching that they could consider and adapt to their situation. But I wonder, are these students ready or likely to promote a discussion approach to the teaching and learning of mathematics?

3.3.4 Lehrerdarbietung und Individualarbeit im Mathematikunterricht

Der Lehrervortrag bzw. die Lehrerdarbietung wird heute als Unterrichtsform sehr kritisch beurteilt.[17] Begründet wird dies wohl vor allem damit, dass sie die Schüler zu wenig aktiviere und zu wenig an der Entwicklung neuer Einsichten und Kenntnisse beteilige. Es gibt jedoch mindestens drei Studien, die der Annahme widersprechen, dass die Lehrererklärung eine unzulängliche Unterrichtsform sei (siehe BENNET 1976, STALLINGS 1976 und BOURKE 1984). Aber auch STIGLER & BARNES (1988) kommen zu dem Urteil:

> „First is the assumption that direct explanation is not a useful way to teach mathematics to young children. There is a widespread belief in our society that concrete experiences are the best way to teach young children, and that language will either go over their young heads, or lead to learning of a superficial kind. There are two important findings from the Japanese observations that we need to ponder: (a) Young children are capable of responding to, and apparently understanding, complex verbal explanations, and (b) it is possible to stress both concrete experiences and verbal explanations at the same time. It is possible, in fact, that both are necessary to promote high levels of learning“ (S. 299).

Wenn man bedenkt, dass der gemeinsam erarbeitende Unterricht, bei nüchterner Analyse, bezüglich der geistigen Aktivierung der Schüler bei weitem nicht hält, was er zu versprechen scheint, dafür aber eine Reihe von Nachteilen mit sich bringt, dann wird man vielleicht eine gute Lehrerdarbietung in etwas anderem Licht sehen. Mit einer ‘guten’ Lehrerdarbietung ist gemeint, dass sie wohl vorbereitet, überlegt aufgebaut, verständlich formuliert, nicht zu rasch vorgetragen und zeitlich nicht allzu ausgedehnt ist, und dass sie der Lehrer – wo irgend möglich – mit Modellhandlungen, zeichnerischen Darstellungen und anderen Graphiken, evtl. auch mit schriftlichen Notationen unterstützt. So gestaltet bietet sie eine gute Gelegenheit zu aufmerksamer und konzentrierter Wahrnehmung eines zusammenhängenden Sprachstücks. Sie kann in höheren Schulstufen eine wichtige Vorbereitung auf das Lernen mittels Vortrag und Vorlesung im Hochschulunterricht darstellen.

Die bei einer Lehrerdarbietung fehlende sichtbare Eigenaktivität der Schüler kann und sollte allerdings durch begleitende (Mitnotieren) oder anschließende Verarbeitung ausgeglichen werden. Erfolgt diese in Gruppen, liefert die Darbietung den Schülern ausreichend Anlass zu intensivem Gespräch über die richtige Interpretation und zum Ringen um eine angemessene sprachliche Formulierung eines das Dargebotene reproduzierenden oder anwendenden Textes. Erfolgt sie im Rahmen von Individualarbeit, so bietet sie eine gute Gelegenheit zu schriftlicher Sprachproduktion.

Die Individualarbeit bietet - unabhängig davon, ob es sich dabei um die Rekonstruktion bzw. die Anwendung von sprachlich Wahrgenommenem, um die Protokollierung einer Aufgaben- bzw. Problemlösung oder um eine spontane Sprachproduktion im Rahmen einer Exploration oder einer Mitteilung handelt - ein gute Gelegenheit, dass der Lehrer mit einzelnen Schülern den oft so dringenden Dialog sucht. Dabei kann er sich über die Kennt-

[17] An Hochschulen und bei Fortbildungskursen hat er hingegen nach wie vor seinen festen Platz.

nisse, das Verstehen und die Sprachentwicklung eines Schülers informieren. Der Schüler seinerseits kann seine Gedanken und Formulierungen der unmittelbaren Kontrolle durch einen kompetenten Gesprächspartner aussetzen. Gerade deshalb hat auch Alleinarbeit - nicht nur im Rahmen der Hausaufgaben, sondern auch im alltäglichen Unterricht - einen berechtigten und bedeutsamen Platz.

4. Sprachförderung im Mathematikunterricht

Die Analysen zur mathematischen Fachsprache (Kapitel 1) zum Zusammenhang zwischen Sprache und Mathematiklernen (Kapitel 2) und zur sprachlichen Kommunikation im Fach Mathematik (Kapitel 3) haben deutlich gemacht, dass der didaktische Ort der Sprache im Mathematikunterricht mit großer Sorgfalt gewählt und ihre Funktion in der unterrichtlichen Kommunikation in mancher Hinsicht neu bestimmt werden muss. Dabei ist nicht nur dem Sprachverstehen und der sprachlichen Eigenaktivität der Schüler allgemein ein hoher Stellenwert einzuräumen (ein höherer, als in der gegenwärtigen Unterrichtspraxis üblich) und so deren häufig zu beobachtende 'mathematischen Sprachlosigkeit' zu überwinden. Es führt auch kein Weg daran vorbei, ihre fachsprachliche Kompetenz und Performanz der Schüler gezielt und in angemessener Weise zu fördern und zu entwickeln. Davon soll in diesem vierten Kapitel die Rede sein.

Zuerst werden Aufgaben und Ziele für eine Sprachförderung im Mathematikunterrichts formuliert und diskutiert (4.1), dann in methodisch konstruktiver Weise Formen und Möglichkeiten der Förderung des Sprachverstehens aufgezeigt (4.2), Anregungen zur Sprachproduktion, insbesondere zur Produktion eigener Texte durch die Schüler gegeben (4.3) und Beispiele für gezielte Sprachreflexion vorgestellt (4.4).

4.1 Ziele und Aufgaben

Was die Ziele und Aufgaben der Sprachförderung im Mathematikunterricht angeht, soll nach allgemeinen bzw. formalen (4.1.1) und spezifisch die Fachsprache betreffenden (4.1.2) Zielen unterschieden werden.

4.1.1 Allgemeine Ziele der Sprachförderung

Für den Gebrauch der Sprache durch Schüler und Lehrer im Rahmen der unterrichtlichen Kommunikation lassen sich drei Aufgaben unterscheiden:

- das Verstehen von sprachlichen Äußerungen des Lehrers und der Mitschüler sowie von (schriftlichen) Texten (Sprachverstehen),
- das Hervorbringen eigener sprachlicher Äußerungen und Texte (Sprachproduktion) und
- das 'Übersetzen' von gesprochener Sprache in geschriebene und umgekehrt. Diese drei Aufgaben sollen kurz skizziert werden.

a) Sprachverstehen

Die Schüler hören im Mathematikunterricht fachliche Erklärungen, Instruktionen und Kommentare des Lehrers sowie die verbalen Beiträge von Mitschülern. Sie lesen Aufgabentexte sowie Erklärungen und Anleitungen, die ihnen auf der Wandtafel oder auf Folien, auf Aufgaben- oder Arbeitsblättern sowie in Lehr- und Übungsbüchern präsentiert werden. Gelegentlich werden sie auch mit der Lektüre von Texten befasst, die ihre Mitschüler produzieren. Wenn diese mündlichen Sprachäußerungen und Texte zum Lernerfolg der Schüler beitragen sollen, müssen gewisse Voraussetzungen für ihre Auffassung und ihr Verstehen erfüllt sein. Es geht um verstehendes Zuhören und Sinn entnehmendes Lesen. Dazu gehören insbesondere die Bereitschaft und die Fähigkeit,

- aufmerksam zuzuhören bzw. konzentriert zu lesen, um eine vollständige inhaltliche Erfassung sicherzustellen,
- das Gehörte oder Gelesene in interpretativer Haltung für sich möglichst klar gedanklich zu strukturieren und es reflexiv zu verarbeiten,
- das Wahrgenommene aktiv zu rekonstruieren und es möglichst sinngetreu mit eigenen sprachlichen Mitteln wiederzugeben und
- das Gehörte bzw. Gelesene kritisch zu befragen und nach explikablen Kriterien zu beurteilen.

ROMMETVEIT (1985) zufolge ergeben sich Lerngelegenheiten in natürlicher Weise im Verlauf von Dialogen, die durch ein ausdrückliches Bemühen um Kommunikation gekennzeichnet sind. Ob ein Zustand der Intersubjektivität erreicht wird, hängt ab von grundlegenden dialogischen Gesprächsmustern, vom Vorrang des Sprechers zu entscheiden, was er meint, und dem Bemühen des Hörers, dem Gesagten Sinn zu geben und die Sichtweise des Sprechers einzunehmen.

b) Sprachproduktion

Das Einbringen von Sprachprodukten in den Unterricht erscheint zunächst vornehmlich eine Aufgabe des Lehrers zu sein: Mündlich formuliert er im gemeinsam erarbeitenden Unterricht Instruktionen und Kommentare oder gibt Erklärungen;, schriftlich präsentiert er den Schülern Lern-, Übungs- und Prüfungsaufgaben. Doch ist Sprachproduktion gleichermaßen eine wichtige Aufgabe für die Schüler. Auch wenn man das Verstehen von verbalen Äußerungen und Texten nicht als eine passive Aufnahme von Bedeutungen, sondern als aktiven Prozess einer individuellen Sinnkonstruktion auffasst, kann sich der Lehrer im Mathematikunterricht nicht mit aufmerksamem Zuhören und Lesen zufrieden geben. Die im Kapitel 2 angestellten Überlegungen und vorgetragenen Befunde verweisen auf die Notwendigkeit, dass die Lernenden selbst sprachlich aktiv werden.

Die Schüler sollen im Rahmen des gemeinsam erarbeitenden Unterrichts Antworten auf Lehrerfragen, eigene Beobachtungen und Gedanken möglichst zusammenhängend – und nicht nur in der häufig zu beobachtenden Form fragmentarischer Wort- oder Satzergänzungen bzw. nichtssagender Antwortfragmente – vorbringen. Ebenso haben sie ausführlich über die in einer häuslichen oder schulischen Alleinarbeit oder in unterrichtlicher Partner- und Gruppenarbeit unternommenen Aktivitäten, über dabei gewonnene Erkenntnisse, angewendeten Lösungsverfahren oder gefundene Lösungen zu berichten. Die Schüler sollten solche Berichte auch in schriftlicher Form abfassen können. Ihr ‘schriftlicher Ausdruck’ im Fach Mathematik darf nicht auf das Niederschreiben normierter Verfahrensprotokolle beschränkt bleiben; er muss eigenständig formulierte Texte einschließen.

c) Übergang von verbaler zu schriftlicher Darstellung und umgekehrt

Im Mathematikunterricht müssen Schüler auch verbale sprachliche Darstellungen verschriftlichen und, umgekehrt, Texte in gesprochene Sprache überführen können. Von der Zielstellung her relativ einfach und in der Praxis (zu) häufig geübt ist der Übergang von einem vornehmlich in normierten Symbolen geschriebenen mathematischen Text zu einer entsprechend normierten Verbalisierung und umgekehrt. Es ist ein Lesen bzw. Schreiben in Form einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung von Wörtern zu Symbolen bzw. Symbolsystemen. Man kann hier im strengen Sinn von einem Prozess der Enkodierung bzw. Dekodierung sprechen, sofern man die Symbole als Kode für verbale Bezeichnungen mathematischer Begriffe, Beziehungen sowie arithmetisch-algebraischer und logischer Operationen sieht. Dabei reicht es nicht aus, wenn ein Schüler die Regeln für das Lesen mathematischer Texte kennt und diese fehlerfrei in gesprochene Sprache überführt, ohne genaue Bedeutung zu kennen, oder wenn er umgekehrt ohne erkennbares Verständnis eine normierte Verbalisierung fehlerfrei in fachlichen Zeichen zu notieren vermag.

Der Mathematiklehrer kann sich keinesfalls mit der Fähigkeit der Schüler zu mechanischem Lesen und Schreiben begnügen. Er sollte eine eventuelle Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen Verbalkode und Zeichenkode aufzubrechen trachten, und die Schüler stattdessen anleiten, mathematische Gedanken in verschiedener Weise zu verbalisieren und zu notieren. Bedeutsam erscheint auch ihre Fähigkeit, Texte interpretativ, d. h. auch paraphrasierend und umschreibend zu ‘lesen’ und verbale mathematische Darstellung beim Übergang zur Notation zu vereinfachen und zu verkürzen. Prägnanz im Sinne einer gewissen ‘Schreibökonomie’ sollte im Unterricht mehr ein Kennzeichen schriftlicher Darstellungen sein, während die zugehörige Verbalisierung eher ausführlich, auch redundant gestaltet sein kann.

Die vorausgehend genannten allgemeinen Aufgaben und Ziele des Sprachgebrauchs mögen zunächst wenig spezifisch für das Fach Mathematik erscheinen. Sicherlich erwartet man auch in anderen Fächern von den Schülern, dass sie verständig am Unterrichtsgespräch teilnehmen und Texte sinnerfassend lesen können. Doch schon das Auffassen und das Bearbeiten von mathematischen Aufgaben, das Definieren von Begriffen, das Formulieren von Lehrsätzen und das Beweisen stellen Sprachinhalte von einer spezifischen, vor allem der Mathematik zugeschriebenen Charakteristik dar. Spezielle sprachbezogene Lernziele erwachsen jedoch vor allem aus dem besonderen Charakter der Sprache im Mathematikunterricht, die, wie oben bereits besprochen, zumindest teilweise vom Gebrauch fachsprachlicher Mittel und der Berücksichtigung fachsprachlicher Konventionen und Grundsätze geprägt ist. Eine genauere Beschäftigung mit diesem Problemkreis ermöglicht es, die diesbezüglichen Aufgaben und Ziele zu präzisieren.

4.1.2 Förderung der fachsprachlichen Kompetenz

Nachfolgend sollen die Bedeutung und der angemessene Umfang der fachsprachlichen Kompetenz der Schüler diskutiert und Ziele für die Förderung dieser Kompetenz formuliert werden.

a) Bedeutung der fachsprachlichen Kompetenz

Das Sprachverstehen der Schüler erhält im Fach Mathematik dadurch einen besonderen Charakter, dass die Lehrer- und die Mediensprache unvermeidbar mit Elementen des fachsprachlichen Registers durchsetzt sind. Es muss den Schülern gelingen, die Spannungen zwischen dem ihnen verfügbaren alltäglichen Register und dem mathematischen Register aufzulösen und die ihnen daraus erwachsenden Schwierigkeiten zu überwinden. Die Schüler sollen auch lernen, sich in ihren eigenen Sprachprodukten sowie bei der ‘Übersetzung’ von mündlicher in schriftliche Sprache und umgekehrt selbst des fachlichen Registers zu bedienen. Wesentlich für das Gelingen dieses Zieles kann die Erfahrung sein, dass die Beherrschung der Fachsprache für den Schüler erkennbare Vorteile bringt.

Eine Teilhabe der Schüler an der durch die mathematische Fachsprache verbundenen Wissens- und Kulturgemeinschaft sollte dazu angetan sein, ihre Fähigkeit zu mathematischem Denken und Handeln fördernd beeinflussen und entscheidend formen. Ihre Fähigkeit, mathematische Sachverhalte in zusammenhängender Rede und komplexen Texten mit fachsprachlichen Mitteln verständlich und genau darzustellen, könnte ein Ausweis dafür sein, dass es ihnen gelungen ist, sich mathematisches Wissen anzueignen und mathematische Fähigkeiten zu entfalten.

Neben der kognitiven kommt der mathematischen Fachsprache auch eine kommunikative Funktion (im Sinne von KLIX 1971) zu. ELLERTON & CLEMENTS (1991) zeigen an Hand von Beispielen – vor allem von Presseauszügen –, wie sehr unsere Alltagssprache mit Mathematik durchsetzt ist. In einem siebenzeiligen Zeitungsbericht über bedrohte Tierarten in Australien finden sich, neben einer Reihe von Zahlenangaben, Ausdrücke wie ‘viertausend Jahre lang’, ‘in einem alarmierenden Ausmaß’, ‘seit’, ‘1788’ (als Jahreszahl), ‘innerhalb der nächsten 10 bis 20 Jahre’, ‘Hunderte von Tierarten’, ‘könnten für immer verschwinden’. Ein solcher Text „...illustrates not only how apparently simple language can incorporate deceptively complex mathematical concepts and conventions, but also how language, mathematics and Western culture are necessarily and inevitably intertwined“ (S. 7). Die Schüler müssen lernen, solche Texte zu verstehen, und das heißt auch, die in ihnen auftretenden mathematischen Begriffe bedeutungsgerecht aufzufassen.

FISCHER (1986) äußert sich zum Problem von Kommunikation und Mathematik in sieben teils provokanten, dialektisch angelegten Thesen und zeigt damit, in welche Form von Sprachverwendung die Schüler einzuführen sind:

(1) „Mathematik regelt das Zusammenleben der Menschen in vielen Bereichen. Sie ist gleichzeitig Mittel und System der Kommunikation. Damit stellt sie eine Verbindung zwischen dem Individuum und der Gesellschaft her“ (S. 121). Mathematik hat Bedeutung in vielen Lebensbereichen. Sie erfasst nur das, was sich verallgemeinern lässt bzw. unabhängig von Besonderheiten individueller Verhältnisse und objektiv ist und hat dafür besondere Regelsysteme entwickelt.

(2) „Mathematik ist anschauliche Kommunikation über Unanschauliches“ (S. 122). Ihr Gegenstand sind nicht die (wahrnehmbaren) ‘Dinge’ selbst, sondern Beziehungen zwischen ihnen, Strukturen. Doch ist auch die Vergegenständlichung des Abstrakten konstitutiv für sie.

(3) „Mathematik ist einfach, klar und undurchsichtig“ (S. 123). Simple Schlüsse schließt sie zu komplexen Kombinationen zusammen, die dann schwer durchschaubar werden.

(4) „Mathematik ist präzise und eindeutig und erleichtert bzw. behindert dadurch Kommunikation. Der Zwangscharakter ermöglicht Freiheit“ (S. 124). Präzision erleichtert Kommunikation durch Vermeidung von Missverständnissen. Genau mit dem gleichen Mittel tötet sie aber auch das Gespräch ab, weil es nichts mehr zu erörtern gibt. Der Zwang der inneren Ordnung macht frei gegenüber äußerer Autorität.

(5) „Mathematik ist mehrdeutig und beliebig. Sie benötigt daher auch autoritäre Unterdrückung“ (S. 125). Mit dieser Antithese zur vorausgehenden These hat Fischer den Bezug der Mathematik zur Wirklichkeit, ihre Beliebigkeit in der Darstellung und die Orientierung an ihrer Entwicklung im Auge. Es entsteht die Notwendigkeit, mögliche Willkür durch strenge Autorität abzufangen.

(6) „Mathematik erfordert Meta-Kommunikation und behindert deren Entwicklung“ (S. 127). Gerade Mehrdeutigkeit und Beliebigkeit machen es erforderlich, aus der Objektebene herauszutreten und ein über das explizite Wissen hinausgehendes ‘Metawissen’ zu aktivieren. Weil aber die Meta-Kommunikation subjektiven Charakter hat, wird ihr in der Kommunität zu geringe Bedeutung zugemessen.

(7) „Mathematische Kommunikation ist abgeschlossen und zirkulär. Ihre Selbstgenügsamkeit entspricht einem Hang zur Selbstbegrenzung oder zum Totalitarismus“ (S. 129). Mathematik neigt dazu, die Form ihrer Tätigkeit zu ihrem Inhalt zu machen und ihre Erkenntnis nicht auf außerhalb Liegendes zu beziehen. Sie trägt das Kriterium für Wahrheit in sich selbst.

b) Umfang der fachsprachlichen Kompetenz

Wenn nachfolgend Ziele zur Förderung der fachsprachlichen Kompetenz und Performanz formuliert werden, so sollten diese als Maximal- und Endziele des schulischen Mathematikunterrichts aufgefasst werden. Sie können selbstverständlich nicht alle schon zu Beginn des Mathematikunterrichts angestrebt und auch nicht bei allen Schülern im gleichen Umfang erreicht werden. Die Ziele sind gegebenenfalls auf mindestens drei Arten didaktisch zu modifizieren:

- durch Beschränkung im Umfang (quantitative Restriktion): Auf einen Teil der Ziele oder einige ihrer inhaltlichen Aspekte wird verzichtet. So lässt sich etwa die Anzahl der Bezeichnungen und Symbole, welche die Schüler kennen sollen, reduzieren.
- durch Beschränkung im kognitiven Anspruch (qualitative Restriktion): Beispielsweise bleiben die mathematischen Bezeichnungen und Symbolen zugeordneten Fachbegriffen in ihrem Allgemeinheitsgrad oder Abstraktionsniveau eingeschränkt. Oder bei Texten wird der Grad an Prägnanz bewusst niedrig gehalten, um die sprachliche Auffassungskraft der Schüler nicht zu überfordern; der Lehrer versucht etwa bei Erklärungen und Beweisvorführungen bewusst redundant zu sprechen.
- durch Beschränkungen im Lerntempo (temporäre Restriktion): Es wird, ohne dass notwendig eine Veränderung der Lernziele nach Umfang oder Anspruch vorgesehen wäre, der Zeitpunkt hinausgeschoben, zu dem sie erreicht sein müssen.

Restriktionen lassen sich vor allem mit dem Alter bzw. dem kognitiven Entwicklungsstand der Schüler begründen. Man unterstellt z. B., dass die Auffassungskraft oder das Leistungsvermögen des generalisierenden, abstrahierenden und formalen Denkens in einer gegebenen Altersstufe nicht ausreicht, um die Lernziele voll erfüllen zu können. Rückstände in der kognitiven Entwicklung können freilich auch andere als Altersgründe haben, z. B. ungenügende häusliche Förderung oder ungünstige schulorganisatorische Bedingungen.

Ein anderer Gesichtspunkt ist der Stoffkanon einer Klasse bzw. eines Schulzweiges für das Fach Mathematik. Wenn beispielsweise ein (amtlicher) Lehrplan für die Hauptschule als Lehrinhalte nahezu ausschließlich Berechnungsverfahren vorsieht, so hat es wenig Sinn, die Schüler mit Denk- und Begriffsmitteln der mathematischen Logik auszustatten. Die Beschäftigung mit der Problematik von Aussagen und Aussageformen scheint fehl am Platz, wenn man über einfache Anwendungsbeispiele mit linearen Gleichungen in einer Unbekannten nicht hinauskommt. Der Stoffkanon ist im Kontext der Gesamtbildungsaufgabe zu sehen, die einer Schulart bzw. einem Schulzweig gestellt ist. Wenn etwa die bayerische Hauptschule in ihrem Lehrplan das Schwergewicht deutlich auf einen anwendungsbezogenen Mathematikunterricht legt, erlaubt oder verlangt das stärkere Restriktionen hinsichtlich der Förderung der Fachsprache als etwa im Fall des Gymnasium mit seiner stärkeren Orientierung an einem systematischen Theorieaufbau. Hier erscheint es sinnvoll und möglich, mit Fachbezeichnungen, fachlicher Symbolik und fachlichen Sprachformen konstruktiv und konsequent zu arbeiten.

Restriktionen, die für die Schülersprache vorgesehen sind, sollten auch in Bezug auf die Sprache des Lehrers und des Mediums gelten, ja müssen von ihnen gesteuert werden. Es muss gegebenenfalls auf die Verwendung gewisser Fachtermini und auf den expliziten Gebrauch logischer Sprachstrukturen verzichtet werden. Anderseits dürfte es für die unterrichtliche Kommunikation förderlich sein, wenn die Sprache des Lehrers wie diejenige der Lernmedien einen möglichst hohen Standard verkörpert. Die Vorbildfunktion und prägende Kraft kann den Lernprozessen der Schüler wichtige Impulse geben. Jedenfalls wird die Sorgfalt, mit der ein Lehrer die Sprache im Mathematikunterricht handhabt, mehr sprachfördernde Wirksamkeit entfalten als wiederholte Vorschriften oder Ermahnungen zu angemessenem Sprachgebrauch.

c) *Ziele zur Förderung der fachsprachlichen Kompetenz*

Welche Aufgaben und Ziele lassen sich zum Bereich der Förderung fachsprachlicher Kompetenz im Einzelnen formulieren?

Zum ersten ergeben sich für die Sprachförderung der Schüler Ziele zum Umgang mit fachlichen Bezeichnungen und Symbolen:

– Die Schüler sollen die fachlichen Bedeutungen von Bezeichnungen mathematischer Objekte und Relationen sowie von Symbolen für mathematische Konstanten kennen und diese sinnvoll verwenden können.

  Die Rede ist hier von Bezeichnungen und Symbolen wie "Trapez", "35", "Gleichung", "... ist parallel zu ...", "... ist kleiner als ...", "... plus ... ist gleich ...", "... ist größter gemeinsamer Teiler von ... und ..." usw.. Es kann nicht genügen, dass die Schüler Bezeichnungen als solche wiedererkennen und Symbole lesen können. Das Ziel umfasst möglichst genaue Vorstellungen von deren fachlich üblicher Bedeutung. Handelt es sich dabei um Wörter der Alltagssprache, so müssen die Schüler nicht nur der vertrauten Bedeutung eine oder mehrere neue, 'mathematische' Bedeutungen hinzufügen, sondern diese auch von der alltagssprachlichen unterscheiden lernen. Beim Sprachverstehen muss es ihnen gelingen, von den möglichen (umgangs- und fachsprachlichen) Bedeutungen je nach Kontext die jeweils angemessene oder geeignete auszuwählen bzw. aus dem Zusammenhang zu erschließen. Bei selbst produzierten Sprachäußerungen und Texten müssen die Schüler zunehmend fähig werden, mathematische Bezeichnungen und Symbole in fachlich üblicher Bedeutung zu verwenden.

– Die Schüler sollen die Bedeutung von Variablen verstehen und diese im mathematischen Sinn gebrauchen können.

  Fürs erste gilt es zu erkennen, ob ein Zeichen als Variable oder als Konstante gebraucht wird. Die Unterscheidung kann schwierig sein, wenn gleiche Buchstaben einmal als Namen zur Bezeichnung bestimmter Objekte, Mengen, Punkte und dergleichen, ein andermal aber als Platzhalter verwendet werden. Gleichwohl müssen die Schüler einsehen, dass Ausdrücke mit Variablen eine verallgemeinerte Form von Ausdrücken mit Konstanten darstellen und jeweils für eine Klasse solcher Ausdrücke stehen. Sie müssen wissen, dass zu jeder Variablen ein ‘Einsetzbereich’ gehört, dessen Elemente an ihre Stelle gesetzt werden dürfen, und fähig sein, nach Ersetzung der Variablen in Termen Funktionswerte zu bestimmen und über den Wahrheitswert der entstehenden Aussagen zu entscheiden. Falls der Einsetzbereich nicht explizit angegeben ist, muss er aus dem Zusammenhang erschlossen werden.

  Die Schüler sollen fähig werden, selbst mathematische Operationen und Beziehungen mittels Variablen in verallgemeinerter Form darzustellen (Term- oder Gleichungsansatz). Auch hier müssen sie beachten, dass zu jeder Variablen ein Einsetzbereich gehört und dieser eigens anzugeben ist, wenn er nicht in evidenter Weise aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Bezüglich komplexerer Spracheinheiten lassen sich für den Unterricht folgende Aufgaben und Ziele formulieren:

– Die Schüler sollen Definitionen mathematischer Begriffe interpretieren und unter angemessener Verwendung fachsprachlichen Mitteln selbst formulieren können.

  Es geht zuerst um die Fähigkeit, mit vorgegebenen Definitionen angemessene Bedeutungsvorstellungen zu verbinden, d. h. die vom Sprecher oder Textautor jeweils intendierten Bedeutungen möglichst genau aufzufassen. Wichtig sind dabei eine deutliche Abgrenzung des Begriffsumfangs, ein präzises Erfassen des Begriffsinhalts und eine klare Bedeutungsunterscheidung von benachbarten Begriffen. Die Schüler sollen aufgrund von Definitionen die Repräsentativität von Objekten für Begriffe entscheiden und auch Sonderfälle auswählen bzw. herstellen können sowie Unter- und Oberbegriffe identifizieren. Sie sollten sensibel werden für das Problem der Polysemie und der Synonymie von Bezeichnungen und dabei die Kontextgebundenheit und den Vereinbarungscharakters der Zuordnung von Bezeichnungen bzw. Symbolen und Bedeutungen berücksichtigen. Schließlich sollten sie in der Lage sein, in Definitionen Unvollständigkeiten zu erkennen und ermuntert werden, sich im Fall von Unklarheiten im Begriffsverständnis über die gemeinte Bedeutung zu informieren.

  Was ihre eigenen mündlichen oder schriftlichen Definitionen angeht, müssen die Schüler unterscheiden lernen zwischen einer Aneinanderreihung von Merkmalen, die Referenzobjekten gemeinsam sind (einem Merkmalskatalog) und einer Definition, die aus diesem Katalog gerade so viele Merkmale herausgreift, wie zur eindeutigen Bestimmung des Begriffsinhalts notwendig sind.

– Die Schüler sollen Lösungsprozesse für mathematischer Aufgaben, insbesondere auch von Argumentations- und Beweisaufgaben unter Verwendung fachsprachlicher Mittel formulieren können.

  Es geht vor allem darum, dass die Schüler beim Formulieren von Texten darauf achten, dass der Hörer bzw. Leser eine möglichst klare Vorstellung zur Bedeutung der verwendeten mathematischen Bezeichnungen und Symbole gewinnen kann. Das verlangt das Vermeiden von Inkonsistenzen in der Begriffsfestlegung, d. h. eines Bedeutungswechsels verwendeter Bezeichnungen und eines Bezeichnungswechsels für gleiche Bedeutungen sowie inhaltlicher Widersprüche.

– Die Schüler sollen logische Aussageverknüpfungen korrekt erfassen und Elementaraussagen logisch korrekt verknüpfen können.

  Dazu gehört, verneinte sowie mit *und* (im Sinne von 'sowohl als auch') verknüpfte Aussagen im mathematischen Sinn aufzufassen, bei Verknüpfungen von Aussagen durch *oder* zwischen Disjunktion (einschließen-des 'oder') und Alternative (im Sinne von ‘entweder - oder’) zu unterscheiden; ebenso zwischen Verknüpfungen mit 'wenn ... dann' und 'genau dann ... wenn'. Die Schüler sollen fachsprachliche Aussagen auf ihre logische Verknüpfungsstruktur hin untersuchen und verstehen können. Das Verstehen von Aussageverknüpfungen soll sich allenfalls auch auf ihre Formalisierung in Zeichen wie $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ erstrecken. Es gilt dabei, aufgrund der Kenntnis des Wahrheitswerts von Elementaraussagen den Wahrheitswert von Aussageverknüpfungen festzustellen.

Umgekehrt sollen die Schüler lernen, Aussagen korrekt zu verneinen sowie mit 'und' (im Sinne von 'sowohl als auch') zu verknüpfen, 'oder' in angemessener Weise in einschließendem bzw. ausschließendem Sinn zu verwenden sowie zwischen Implikation (Verknüpfung mit 'wenn ... dann') und Äquivalenz (Verknüpfung mit 'genau dann ... wenn') zu unterscheiden. Nach und nach sollten sie auch selbst die entsprechenden Junktoren in formalisierter Form gebrauchen können.

- Die Schüler sollen quantifizierte Aussagen korrekt auffassen und selbst bilden können.

  Die Schüler müssen zunehmend in der Lage sein, die Bedeutung mathematisch normierter Quantoren (Existenz- und Allquantor) zu verstehen. Besonders in der Mengensprech- und Mengenschreibweise sind Allaussagen verborgen, mit deren Gebrauch die Schüler in gewissem Umfang vertraut sein sollten.

  Die Schüler sollten auch selbst mit Quantoren verbundene Aussagen formulieren können. Dabei dürfen sie sich auch alltagssprachlich üblicher Ausdrucksmittel bedienen, wenngleich ein zunehmender Gebrauch mathematisch normierter Quantoren (Existenz- und Allquantor) erstrebenswert erscheint.
- Die Schüler sollen wichtige Konventionen des mathematischen Sprachgebrauchs kennen und als solche auffassen bzw. verwenden.

  In erster Linie ist hier an Bezeichnungskonventionen zu denken wie allgemein verbreitete Abkürzungen (z. B. für Größeneinheiten wie cm, dm^2, mm^3) und Symbole (z. B. N für die Menge der natürlichen Zahlen, $\geq$ für „größer oder gleich“, $\Rightarrow$ für „folgt“ bzw. „dann“, $||$ für „parallel“), aber auch an Vereinbarungen wie den Klammervorrang beim Berechnen algebraischer Terme, die Klammerersparnisregel („Punkt-vor-Strich“), Schreibvereinfachungen wie x für 1 x und ab für a b und schließlich an normierte Schreibweisen wie bei den schriftlichen Verfahren der Addition oder Division.

- Die Schüler sollen mit speziellen Grundsätzen des mathematischen Sprachgebrauchs vertraut sein.

  Zu den hier gemeinten Grundsätzen gehören vor allem die im Kapitel 1 beschriebenen: Serialisierung, Gleichartigkeit der Konfiguration und alphabetische Korrespondenz, Symmetrie und Dualität, Wohlgeformtheit und Konfiguralität.

  Was bei vielen Übergängen von einer Darstellungsform in eine andere, vor allem aber beim symbolischen Darstellen eines mathematischen Gedankens vom Schüler verlangt werden muss, kann man als Linearisierung und Delinearisierung bezeichnen. Sprachliche Äußerungen und Texte stellen wegen des grundsätzlich sequentiell-linearen Charakters der gesprochenen Sprache vernetzte begriffliche und implikatorische Beziehungen in einer zeitlichen Abfolge von Gedankenschritten dar. Damit die Schüler die gedachte Struktur der gedanklichen Zusammenhänge verstehen, müssen sie daher die vernetzte Begriffs- und Implikationsstruktur aus dem linear angeordneten Text gedanklich rekonstruieren. Umgekehrt verlangt die sprachliche Darstellung von begrifflichen und implikatorischen Zusammenhängen sowie beziehungsreich vernetzten mathematischen Gedanken die Überführung einer netzförmigen in eine sequentiell-lineare Struktur, aus welcher der Hörer bzw. Leser dann die Netzstruktur wieder zu rekonstruieren vermag.

  Linearisierung und Delinearisierung lassen sich aber auch auf einige mathematische Symbole wie z. B. Summen- und Integralzeichen oder Matrizen beziehen, die nicht linear, sondern flächenhaft gestaltet sind, dennoch aber linear gelesen werden müssen. Zu dieser Form der Linearisierung müssen die Schüler ebenso befähigt werden, wie umgekehrt zur flächenhaften Notation eines gelesenen mathematischen Textes.

– Die Schüler sollen bei der Formulierung fachlicher Texte nach angemessener Vollständigkeit streben.
  Von den Schülern formulierte Begriffsbeschreibungen, Definitionen, Argumente und Beweise sollten, relativ zum Kontext, möglichst vollständig sein.
– Die Schüler sollen die Prägnanz in mathematischen Texten paraphrasierend auflösen können und in ihren eigenen Sprachprodukten Prägnanz anstreben.
  Der Sinngehalt mathematischer Texte lässt sich wegen der ihnen eigenen Prägnanz oft nur schwer erfassen. Daher sollen Schüler lernen, prägnante Äußerungen und Texte mit weniger Infomationsdichte, d. h. mit größerer Redundanz in eigenen Worten zu formulieren, sich dabei die Bezeichnungs- und Symbolbedeutungen an Beispielen oder geeigneten Referenzobjekten zu vergegenwärtigen und so die Prägnanz durch eine geeignete Reformulierung aufzulösen versuchen.

  Beim Formulieren von mathematischen Texten sollten die Schüler zunehmend zweckmäßige Bezeichnungen und Symbole verwenden und Sätze sowie Texte möglichst knapp formulieren.

Manche Lehrer möchten die Sprache im Mathematikunterricht nicht auf ihre instrumentale Funktion bei der Übermittlung mathematischer Kenntnisse als Lehrinhalte beschränken. Sie sehen es als eine zentrale Aufgabe an, die Schüler in den Gebrauch fachlicher Termini, Symbole, Sprechweisen und Symbolsysteme einzuführen. Sie wollen nicht nur gezielt deren fachsprachliche Kompetenz erweitern, sondern betrachten die mathematische Fachsprache gleichsam als ein Kulturgut, dessen Weitergabe an nachfolgende Generationen pädagogischer Eigenwert zukomme. Für andere sollte die Fachsprache ausdrücklich nicht zu einem eigenständigen Lehrinhalt des Mathematikunterrichts werden. Für diese Auffassung werden mindestens zwei Argumente ins Feld geführt:

– In der Fachwissenschaft Mathematik selbst wird die Einführung von Bezeichnungen, Symbolen und Sprechweisen ausdrücklich als Mittel zum Zweck der Darstellung von Lehrsätzen und deren Beweisen betrachtet; sie sind Instrument, nicht ein Gegenstand der Theoriebildung. Dies sollte auch für den schulischen Unterricht gelten.
– Mathematische Termini und Zeichen werden in verschiedenen Theoriedarstellungen nicht selten mit unterschiedlicher Bedeutung belegt. Für den Hörer bzw. Leser wird diese Bedeutung oft erst aus dem Kontext der Gesamtdarstellung einer Theorie heraus verständlich; aus dem Zusammenhang gerissene, isolierte Begriffsfestlegungen ergeben wenig Sinn.

Sicherlich wären das Verständnis und die Verwendung mathematischen Sachwissens ohne Verwendung und Kenntnis gewisser fachsprachlicher Mittel sehr erschwert, in manchen Fällen sogar unmöglich. Eine vermittelnde Position wird vielleicht als Lehrinhalt nur solche sprachliche Mittel betrachten,

– die als Träger fachlichen Wissens unverzichtbar sind,
– die der Erleichterung der fachlichen Kommunikation dienen und
– die in der Fachwissenschaft so einheitlich definiert sind, dass sie auch für sich allein sinnvoll behandelt werden können.

d) Sprachreflexion

Ein Mathematikunterricht, in dem die Sprachförderung ein wichtiges Ziel ist, sollte die Förderung des Sprachverstehens und der sprachlichen Eigenproduktion durch Aktivitäten ergänzen, in denen die Schüler bewusst über Charakter und Eigentümlichkeiten eines fachlichen Sprachgebrauchs nachdenken lernen: über die unterschiedliche Bedeutung von Bezeichnungen in Alltags- und Fachsprache, über kontextspezifischen Bedeutungswandel von Fachwörtern, über die Bildung von Fachausdrücken, über die Bedeutung fachlicher Symbole, über spezifische, von alltäglich gewohnten abweichende Strukturmerkmale und die Logik fachsprachlicher Sätze und Texte.

4.2 Förderung des Sprachverstehens

Es sollen zuerst einige Schüleraktivitäten vorgestellt werden, die geeignet erscheinen, das Verstehen mündlicher Sprachäußerungen durch die Schüler zu fördern (4.2.1). Bezüglich des Verstehens mathematischer Texte, insbesondere auch schriftlich gestellter Aufgaben, geht es vor allem um den Aufbau einer bestimmten Lesehaltung, die von der an alltagssprachlichen Texten entwickelten deutlich abweicht, sowie um das Schaffen von Voraussetzungen für ein Sinn entnehmendes Lesen solcher Texte (4.2.2).

4.2.1 Schüleraktivitäten zur Förderung des Sprachverstehens

Die Wahrnehmung verbaler Sprachäußerungen des Lehrers oder von Mitschülern durch die Schüler erscheint zunächst als ein passives Geschehen, da er beim Zuhören keine oder wenig nach außen hin sichtbare Tätigkeiten ausführt. Alles, was vom Zuhörer nach außen dringt, sind Mimik und Körpersprache, die Aufmerksamkeit, Interesse und auch Verstehen signalisieren können. Soll aber die Sprachwahrnehmung zu einem Sprachverstehen werden, muss sie sich mit intensivem geistigen Handeln verbinden, in dem das Wahrgenommene verarbeitet und zum Impuls für die Konstruktion eigenen Wissens werden kann. Dieses Handeln lässt sich anregen bzw. intensivieren, wenn sprachliche oder andersartige Aktivitäten die Wahrnehmung begleiten oder ihr folgen, die dem Schüler selbst wie dem Lehrer unmittelbar die Möglichkeit geben zu prüfen, wie er die Worte aufgefasst hat und wie weit seine Auffassung mit der erwarteten bzw. gewünschten übereinstimmt.

Diese Aktivitäten können in verschiedener Weise auf die Sprachwahrnehmung bezogen sein, wie man sich etwa am Beispiel eines Lehrervortrags bzw. einer Lehrerinstruktion oder -erklärung (kurz einer Lehrerdarbietung) überlegen kann:

– Die Schüler können aufgefordert sein, während der Darbietung die wesentlichen Gedanken schriftlich festzuhalten und anhand der so entstandenen Notizen den Inhalt mündlich oder schriftlich - letzteres in Allein-, Partner- oder Gruppenarbeit - möglichst wörtlich zu reproduzieren. Eine solche Aktivität vermag auf jeden Fall zu zeigen, inwieweit es dem einzelnen Schüler gelingt, das Wahrgenommene vollständig und in der originalen Reihenfolge wiederzugeben. Diese gibt aber nicht zuverlässige Hinweise darauf, welches Verstehen einer solchen Sprachproduktion zugrunde liegt. Dargebotenes könnte rein im Gedächtnis (nach Art eines Recorders) aufgezeichnet und abgespielt worden sein.
– Mehr Auskunft über das Verstehen erhält man vermutlich, wenn ein Schüler versucht, die Darbietung zwar vollständig, aber mit eigenen Worten und, evtl. verbunden mit selbst produzierten Bildern (etwa auf dem PC) oder Modellhandlungen, zu rekonstruieren. Es handelt sich dann um eine Art Paraphrase der ursprünglichen Darstellung, wobei die Abfolge der Gedanken in sinnvoller Weise modifiziert oder der Text neu gegliedert und durch Hervorhebungen strukturiert sein darf. Gelingt einem Schüler eine solche vollständige oder doch das Wichtigste enthaltende Rekonstruktion, kann man zunächst annehmen, dass er das sprachlich Wahrgenommene geistig verarbeitet, verstanden hat. Hat man die Möglichkeit, aufgrund der selbst formulierten Darstellung das Verstehen des Schülers mit der erwarteten oder erwünschten Wahrnehmung zu vergleichen, so lässt sich diese gegebenenfalls durch zusätzliche Angebote korrigieren.
– Letzteres gilt noch in verstärktem Maße, wenn die Schüler nicht nur zu einer Rekonstruktion aufgefordert sind, sondern ihnen für ihre nachfolgende Aktivität ein Transfer abverlangt wird. Es kann sich dabei um einen modalen Transfer in dem Sinne handeln, dass sie etwas verbal Dargebotenes zeichnerisch oder im konkreten Modell darzustellen haben.

  SENTFLEBEN (1996) stellt kopfgeometrische Aufgaben vor, bei denen der Lehrer eine geometrische Fragestellung verbalisiert und die Schüler mittels räumlichem Denken und Vorstellen oder „Operieren im Kopf" zu Lösungen kommen, die sie ihrerseits verbal darstellen oder unter Zuhilfenahme von anschaulichen Modellen bzw. Modellhandlungen erläutern. Beispiele sind das Spiel „Wo bin ich?", das gedankliche Zerlegen ebener Figuren, Orientierungsübungen am eigenen Körper sowie das Zeichnen geometrischer Figuren nach Beschreibung.

DEGENER & KÜHL (1984) präsentieren ein etwas anderes Konzept von „Kopfgeometrie“, bei dem die Schüler im Klassenverband geometrische Zeichnungen ausführen, indem sie Schritt für Schritt verbale Anweisungen des Lehrers umsetzen. Nach Fertigstellung der Zeichnung sollen sie dann oft Fragen beantworten, die sich auf das Produkt beziehen. Drei Beispiele solcher Anweisungen:

- „Gegeben ist eine Strecke AB. Zeichne ein Quadrat über AB. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck über AB. Liegt die Spitze des Dreiecks im Quadrat?“
- „Gegeben ist ein Rechteck. Verbinde die Seitenmitten miteinander. Welche Figur entsteht? Verbinde die Seitenmitten der entstandenen Figur miteinander. Welche Figur entsteht nun?“
- „Gegeben ist ein Dreieck ABC und die Parallele zu AB durch C. Spiegle das Dreieck ABC an AB. Welche Figur entsteht? Wie verändert sich der Drachen, wenn C auf der Parallelen nach rechts wandert?“

Nicht in allen Fällen haben die Schüler eine Zeichnung auszuführen. Bei manchen Aufgaben aktivieren sie aufgrund einer Lehrerbeschreibung lediglich ihre Raumvorstellung und verbalisieren Lösungen. Auch hierzu drei Beispiele:

- „Ein quadratischer Drahtbügel rotiert um eine Seite. Welcher Körper entsteht?“
- „Ein Drahtbügel von der Form eines rechtwinkligen Dreiecks rotiert um eine Kathete. Welcher Körper entsteht?“
- „Es ist dunkel. Eine Frau mit spitzem Hut geht geradeaus an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich der Schatten der Hutspitze?“

KÜNZLER (1985) beschrieb Schülern die Herstellung komplexer geometrischer Körper. Beispiel: „Rohteil: Quader mit quadratischer Grundfläche, 60 mm x 60 mm x 100 mm. - Schnitte: An der linken vorderen Ecke oben wird ein Quader weggeschnitten: 30 mm x 30 mm x 50 mm. Die rechte, vordere Ecke oben wird schräg abgeschnitten, Kantenlänge des abgeschnittenen Stückes: oben je 20 mm, nach unten 30 mm. An der vorderen, unteren Kante wird auf der ganzen Breite ein Quader weggeschnitten: 30 mm hoch, 40 mm tief.“ Die Schüler sollten aufgrund dieser Beschreibung den geschnittenen Körper im Maßstab 1:1 in Auf-, Grund- und Seitenriss sowie auf ein gesondertes Blatt die Parallelperspektive zeichnen. Es war ihnen erlaubt, vor den Rissen und der Schrägbildzeichnung ein Modell (z.B. aus Styropor) zu erstellen. In jedem Fall sollten sie ihre Arbeitsschritte möglichst detailliert schriftlich protokollieren und dabei auch auf Schwierigkeiten eingehen, bei deren Behebung der beobachtende Lehrer helfen konnte. Anschließend formulierten die Schüler selbst Aufgaben dieser Art und gaben sie Mitschülern zur Bearbeitung. Auf diese Weise konnten sie Erfahrungen zur Präzision der Konstruktionsbeschreibung machen und herausfinden, wie unterschiedlich die Körper sein können, die zwei Schüler auf der Grundlage ein und derselben Beschreibung herstellten.

Anstelle eines modalen kann aber auch ein sachbezogener Transfer verlangt werden. So könnte der Lehrer einen Beweis für den Satz über die Kongruenz von Dreiecken für die Seiten c und a und den eingeschlossenen Winkel β vorgeführt haben, und die Schüler sollen anschließend den Beweis für den Winkel γ und die ihm anliegenden Seiten formulieren; oder der Lehrer hat vielleicht einen Abbildungsbeweis zum Satz des Euklid für eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks demonstriert, und die Schüler müssen diesen Beweis für die zweite Kathete führen. Ein etwas weitergehender Transfer wäre es, wenn die Schüler eine Lehrerdemonstration zur Herleitung der Inhaltsformel für das Trapez auf das Dreieck, oder die Ableitung der Inhaltsformel für die Pyramide mittels Approximation durch ein- und unbeschriebene Stufenpyramiden auf den Kegel anzuwenden hätten.

– Den tiefsten Einblick in das aufgrund von Sprachwahrnehmung erzeugte Verstehen scheint das Problemlösen zu geben. Einzelne Schüler oder Schülergruppen wären aufgefordert, eine mathematische Aufgabe oder ein mathematisches Problem zu lösen, zu dessen Bearbeitung das in der Lehrerdarbietung übermittelte Wissen unverzichtbar ist. Der Lehrer könnte gleichsam auf indirektem Wege über mehr oder weniger erfolgreiches Problemlösen herauszufinden versuchen, in welcher Art und wie genau die Schüler das von ihm Dargebotene aufgefasst haben. Z. B. würden sie nach einem Vortrag zum Kongruenzsatz SWS eine Aufgabe lösen, bei welcher dieser Satz ein wichtiges Beweiselement darstellt. Oder man würde sie bitten, nach Ableitung der Inhaltsformel für das Trapez den Inhalt verschiedener Trapezflächen zu bestimmen. Die Beispiele machen wohl deutlich, dass der Zusammenhang zwischen dem Inhalt der Sprachwahrnehmung und der nachfolgenden Aktivität beim Problemlösen eher lockerer sein kann als im Fall der Rekonstruktion und des Transfers. Daher kann die Kontrollfunktion der Aktivität für den Lehrer wie für die Schüler selbst eher schwächer ausgeprägt sein. Vielleicht eignet sich die Problemlösung besser für eine spätere Phase, wenn über Rekonstruktion und Transfer das Sprachverstehen bereits überprüft und nötigenfalls korrigiert ist.

Aktivitäten der beschriebenen Art, die sich an zusammenhängende mündliche Sprachäußerungen anschließen, müssten den Schülern vorher angekündigt werden, damit sie deren Aufmerksamkeit und aktiv verarbeitendes Zuhören anregen können. Sie sollten so organisiert sein, dass sie viele, wenn nicht alle Schüler der Klasse einbeziehen. Nach einer Lehrerdarbietung eignet sich am besten die schriftliche Form im Rahmen einer Allein-, Gruppen- oder Partnerarbeit sowie im Rahmen der Hausaufgabe. Die Rekonstruktion scheint wichtiger und wirksamer zu sein als ein so genannter Hefteintrag, bei dem ein vom Lehrer (unter evtl. Mitwirkung der Schüler) vorformulierter Text von der Tafel oder von der Folie abgeschrieben wird. Hierbei kann man nur in seltenen Fällen weiterführende geistige Aktivitäten der Schüler feststellen; vielmehr „pinseln" sie in aller Regel den Text ohne Erfassung des Inhalts wort- oder gar buchstabenweise von der Vorlage ab. Übrigens eignet sich die Rekonstruktion als mündliche Paraphrase von vorgelegten Aufgaben- und Instruktionstexten. Sie kann auch im Rahmen eines Kleingruppengesprächs erfolgen, indem alle Teilnehmer ihre Textauffassung mit eigenen Worten zu formulieren versuchen. Eine solche Aktivität ist am besten geeignet, die immer wieder festzustellende Neigung der Schüler zu wörtlicher Wiederholung (Reproduktion) des Textes zu vermeiden, die ja nicht selten zu dem Zweck eingesetzt wird, fehlendes Verstehen zu kaschieren. Selbstverständlich ist auch ein Transfer eines Textes in eine andere Darstellungsform – z. B. von Sprache in Zeichnung oder konkrete Modelle – hilfreich.

Auch im fragend-entwickelnden Unterricht bzw. im Klassen- oder Gruppengespräch bedarf es geeigneter Impulse zur Steigerung der Aufmerksamkeit und verstehender Verarbeitung. Eine Form ist das paraphrasierende Wiederholen von Lehrerfragen oder Instruktionen, ehe man diese beantwortet bzw. befolgt („Sie fragen mich, ..."; „Sie möchten, dass ich..."). Gleiches gilt für Äußerungen oder Stellungnahmen von Mitschülern; auch sie sollten paraphrasiert werden, ehe man sich auf sie mit einem eigenen Sprachbeitrag argumentativ bezieht. Dies wäre als wichtige Regel der Gesprächsführung nicht nur im Rahmen des Klassenunterrichts, sondern auch in der Partner- und Gruppenarbeit zu praktizieren. Es zwingt nicht nur zu intensiverer Wahrnehmung anderer Sprachbeiträge, sondern motiviert es dazu, eigene Äußerungen sorgfältig und an aufmerksame Hörer adressiert zu formulieren. Zudem veranlasst der intensivere Gedankenaustausch jeden Sprecher, seine Beiträge vielleicht mehrmals zu reformulieren, was man als modalen Transfer der eigenen Darstellung auffassen kann.

4.2.2 Lesen mathematischer Texte

Beim Lesen alltagssprachlicher Texte wie Erzählungen, Berichte oder Sachtexte entwickeln die Schüler eine Lesehaltung, die sich für das Verstehen mathematischer Texte als unzureichend bis ungeeignet erweist:

Beobachtungen von MACGREGOR (1990) und MUNRO (1990) zufolge bildet sich beim Umgang mit üblichen Texten die Gewohnheit heraus, sie nicht Wort für Wort zu lesen, sondern bei jedem Satz schon nach wenigen

Worten Hypothesen über den nachfolgenden Teil zu generieren, der dann nur noch stichprobenweise überprüft wird; lediglich in zwingenden Fällen sehen die Lesenden Anlass, die gebildeten Hypothesen zu revidieren. Die Sinnerfassung bzw. das Verstehen werden durch ein intuitives syntaktisches Wissen beschleunigt. Der Lesende braucht hier nicht „genau“ zu lesen in dem Sinn, dass er jeden einzelnen Buchstaben und jedes Wort beachten müsste. Selbst wenn er mehrere Buchstaben und Wörter „übersieht“, erhält er immer noch hinreichend viel Information, um den Sinn des Textes erfassen zu können. Es werden in solchen Texten auch viele Wörter verwendet, um relativ wenig zu sagen (Redundanz), so dass es auch von daher nicht auf die Wahrnehmung eines jeden einzelnen Wortes ankommt. Schließlich können Schüler oft in die Lektüre ein aufgrund von Alltagserfahrungen verfügbares Sachwissen einbringen, das ihnen beim raschen Erfassen des Textes hilft. Sogar wenn, wie in der Alltagssprache durchaus üblich, im Text nicht ganz so genau gesagt wird, was gemeint ist bzw. nicht genau das gemeint ist, was schriftlich ausdrückt wird, ist der Leser noch in der Lage, die Differenz zwischen „objektivem“ Bedeutungsgehalt des Textes und subjektiv intendierter Bedeutung aufgrund von Kontextwissen zu korrigieren.

Bei mathematischen Texten ist vieles ganz anders zu sehen. In diesem Fall fehlt oft fachliches Vorwissen. Auch das syntaktische Regelwerk ist andersartig und den Schülern nicht immer verfügbar. Daher kann der Leser nicht schon nach wenigen Worten Hypothesen über den Inhalt nachfolgender Textteile bilden. In Fällen, wo die fachliche Bedeutung einiger Ausdrücke von der alltäglichen abweicht, kann das Beiziehen von Erfahrungswissen sogar nachteilig bis sinnentstellend sein (Problem der Bedeutungsinterferenz). Da zudem mathematische Texte zumeist um eine Einschränkung des Interpretationsspielraums bemüht sind (Eindeutigkeit) und überdies mit wenigen sprachlichen Mitteln möglichst viel auszudrücken versuchen (Prägnanz), muss das Geschriebene „wörtlich“ genommen und Wort für Wort gelesen werden, um den Sinn vollständig zu erfassen.

ORTON (1987) zufolge kommt es beim Lesen mathematischer Texte vor allem auf langsames Abarbeiten an, denn jedes einzelne Wort kann entscheidend und jedes Symbol wesentlich für das Sinnverständnis sein. Die wechselseitigen Bezüge innerhalb des Texts machen es notwendig, sich auf alle Textteile zu beziehen. Wichtig erscheint eine interaktive Auseinandersetzung mit den einzelnen Textteilen. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn der Text auf Graphiken, Tabellen oder Diagramme Bezug nimmt, die ihn ihrerseits strukturieren. Der Schüler muss die im Text vorfindbaren Impulse aufnehmen, die ihn zu einer aktiven Auseinandersetzung anregen. Der Fluss der Bedeutungen verlangt eine detaillierte Analyse, um die wichtigen und nützlichen Informationen aufzufinden.

NEWMAN (1983) versucht eine sehr genaue Beschreibung von Fähigkeiten, die man speziell zum Verstehen mathematischer Texte braucht und die daher zu entwickeln sind. Das sind zum einen „mechanische Lesefertigkeiten“, als deren erste das Identifizieren von Wörtern und Symbolen genannt wird. Dies ist vor allem dann von großer Bedeutung, wenn im Mathematikunterricht neue Wörter nicht mit hinreichender Sorgfalt eingeführt werden oder ihre Einführung schon weit zurückliegt, wenn sie wieder einmal in einem Text auftauchen. Im Einzelnen handelt es sich bei den Sprachelementen, die es zu identifizieren gilt,

- um funktionale Wörter (Konjunktionen, Verben, Artikel und Adverbien, usw.); sie bilden den Rahmen, um den die spezifische mathematische Sprache gebaut ist;
- um Instruktionswörter, die den Leser über das Ziel einer Aufgabe bzw. die von ihm erwünschten Tätigkeiten informieren;
- um spezifische Ausdrücke, die zur mathematischen Fachsprache gehören und oft auch in abgekürzter Form erscheinen sowie
- um Symbole wie die des Zahlsystems, Operationszeichen, geometrische Symbole und Platzhalter bzw. Variablen.

Die zweite „mechanische Lesefertigkeit“ verlangt von den Schülern, ihre Lesegeschwindigkeit den Erfordernissen mathematischer Texte anzupassen. Hier ist häufig ein sehr langsames Tempo bis hin zum Wort-für-Wort-Lesen nötig. Die dritte Fertigkeit betrifft die eventuell nötige Abweichung von der üblichen Leserichtung und die vierte die Wortanalyse dort, wo die mathematische Sprache von speziellen Vor- und Nachsilben Gebrauch macht. Dazu gehört die Fähigkeit, bestimmte Schlüsselwörter sowie syntaktische und semantische Muster zur Identifizierung des Kontext beizuziehen. Dies wird zwar häufig in mathematischen Texten durch einen umfangreichen Gebrauch von Symbolen erschwert und kann gelegentlich auch irreführend sein. Beispiel: Herr Müller entnimmt seinem Bankkonto 350 DM und es bleiben noch 648 DM zurück. Wie viel war ursprünglich auf dem Bankkonto? Hier darf der Schüler das Wort *entnehmen* nicht als Hinweis auf die Subtraktion 648 − 350 deuten, sondern muss die erforderliche Addition 648 + 350 erkennen.

Bedeutsamer als die „mechanischen Lesefertigkeiten“ schätzt NEWMAN daher die „Verstehensfähigkeiten“ ein, mit deren Hilfe der Leser einzelnen Wörtern, Phrasen, Sätzen oder Texten, im Fall der Mathematik aber insbesondere auch einzelnen Symbolen oder Symbolsystemen Bedeutung zuschreibt. Mathematische Sprache verstehen heißt fähig sein, Wörter, Symbole und zeichnerische Elemente, die im mathematischen Text enthalten sind, zu interpretieren und in korrekte mathematische Handlungen bzw. Verfahren zu übersetzen. Die Autorin unterscheidet hier drei Niveaus:

– Das wörtliche Verstehen befähigt den Schüler, Anweisungen zu befolgen. Es muss sich ebenso auf Wörter der Alltagssprache wie auf Zahlen und mathematische Fachwörter erstrecken. Im Falle von Textaufgaben reicht es in der Regel aus, zu wissen, was in ihnen gegeben ist. In manchen Fällen gehört dazu auch die Fähigkeit, graphische oder schematische Darstellungen zu lesen.
– Auf dem Niveau des interpretativen Verstehens muss der Schüler über die implizite Bedeutung einer Frage oder Aufgabe nachdenken. Nun müssen vor allem fachspezifische Termini genau interpretiert werden, damit aus ihnen korrekte Handlungen abgeleitet werden können. Dabei gilt es zu beachten, dass in der Mathematik gleiche Begriffe oft mit verschiedenen Bezeichnungen belegt werden und umgekehrt die gleiche Bezeichnung für verschiedene Konzepte stehen kann. Die Interpretation von Symbolen erweist sich wegen ihrer oft großen Ähnlichkeit als schwierig. Es gilt, die Gesamtbedeutung eines Textes interpretativ zu heben und evtl. Ergebnisse oder Lösungen vorauszusehen oder vorherzusagen. Nicht immer ist der zentrale Gedanke einer Aufgabe oder eines Textes in ihm wörtlich formuliert. Er muss auch in impliziter Darstellung gefunden werden und der Schüler muss fähig sein, irrelevante Informationen dabei außer Acht zu lassen. Auch beigegebene Graphiken oder Zeichnungen verstehen sich nicht von selbst, sondern bedürfen der Interpretation.
– Das evaluative Verstehen, mit dem die Bedeutung eines Textes festgestellt werden soll, wird eher auf höheren Stufen der mathematischen Bildung bedeutsam.
– Mit „Anwendungsfähigkeit“ meint die Autorin vor allem das Beiziehen von Lehrbüchern zum Verstehen von Texten sowie die Fähigkeit, sich selbst Notizen zu machen bzw. den Sinn eines Textes in eigener Sprache niederzuschreiben.

Die Ausbildung einer Lesehaltung, die mathematischen Texten angemessen ist, und das Schaffen der beschriebenen Voraussetzungen für das Verstehen dieser Texte ist aller unterrichtlichen Bemühungen wert. Dies zeigen vor allem die Schwierigkeiten, die die Schüler immer wieder mit der Auffassung mathematischer Aufgaben- und Problemtexte haben (siehe etwa BARUK 1989, wobei nicht alle der dort aufgezeigten Schwierigkeiten ihre Ursache in mangelndem Sprachverstehen haben müssen). Die Schüler sollten aber auch, besonders in höheren Jahrgangsstufen, an das Verstehen mathematischer Lehrtexte herangeführt werden. Wie sie deren Inhalte verstehen und wie es ihnen gelingt, mit ihrer Hilfe mathematisches Wissen aufzubauen lässt sich in der gleichen Weise evaluieren, wie dies oben für den Lehrervortrag beschrieben wurde. Eine wertvolle Anregung für die Ausbildung einer sinnorientierten Lesehaltung kann auch das Lesen von historischen Quellentexten zu bereits bekannten Wissensbereichen bieten, wie es JAHNKE (1995 und 1996) vorschlägt.

Im Übrigen ist Sprachverstehens keineswegs nur eine Aufgabe der Schüler. Auch der Lehrer muss bereit und in der Lage sein, die mündlichen wie schriftlichen Äußerungen jedes einzelnen Lernenden in dem von ihm gemeinten Sinne aufzufassen, um die von ihm ausgedrückten fachlichen Inhalte sicher einschätzen sowie Fehlvorstellungen und Wissenslücken zuverlässig aufspüren und korrigieren zu können.

4.3 Förderung der Sprachproduktion

BRISSENDEN (1988) trägt wichtige Argumente für die Bedeutung des Sprechens und des Gesprächs im Fach Mathematik zusammen. Er stützt sich dabei auf verschiedene Literaturquellen wie den COCKCROFT REPORT (1982), auf *Galton & Simon*, *Shuard & Rothery, Kerslake u. a.,* AUSTIN & HOWSON (1979) sowie *Lea*. Danach ist Sprechen das entscheidende Mittel zur Entwicklung der Schülersprache. Es gehört zu den Aufgaben des Lehrers, mathematische Bezeichnungen und ihre Verwendung im Gespräch mit den Schülern zu verwenden. Stets sollte es dabei mehr um einen Prozess des Aushandelns von Bedeutungen zwischen dem Lehrer und den Schülern gehen als darum, dass die Schüler den Lehrer verbal imitieren. Sprechen ist aber auch das geeignete Mittel zum Aufbau des mathematischen Verständnisses sowie zur Entwicklung sozialer Fähigkeiten, zuletzt auch Mittel der Erfolgskontrolle. Sprache bzw. sprechen im Unterricht bedeutet von Seiten des Lehrers darbieten, Fragen stellen, loben oder ermutigen, Schülersprache in verschiedener Weise kontrollieren und mit den Schülern diskutieren. Von Seiten der Schüler heißt Sprechen auf Lehrer- und Schülerfragen antworten sowie mit anderen Schülern und mit dem Lehrer diskutieren. Mathematische Gespräche ereignen sich nur dann, wenn die Schüler mit oder ohne den Lehrer gemeinsam ein Problem lösen oder ein Ziel erreichen, indem sie ihre Gedanken austauschen, ihre Meinungen, ihre Ideen und ihr Verständnis modifizieren.

Für jede Art von Gesprächen gilt eine auf *Grice* zurückgehende „Logik der Konversation". Deren oberstes Gebot lautet: Du sollst kooperativ sein. Jeder erwartet vom anderen, woran er sich selbst beim Sprechen hält oder halten sollte. Die nachfolgende Illustration des Gemeinten ist mit einigen Änderungen ZIMMER 1995 entnommen. Fragt jemand einen anderen, der ein Buch in der Hand hält, was er da habe, und antwortet der andere: *Eine Videokassette*, so wäre dies eine Täuschung. Antwortet er: *Ein Artefakt der westlichen Kultur*, so wäre es eine eher kryptische Antwort. Ist die Antwort: *Dies ist kein Butterbrot* oder *Das ist ein Buch, und es ist drei Uhr*, so mag dies richtig sein, aber die Antwort ist ganz oder teilweise irrelevant. Die Antwort *Papier* wäre wohl unzureichend; die Antwort *Das ist ein am 10.Juni für 9 Mark 80 gekaufter Taschenkrimi, gedruckt auf ungebleichtem Papier* wäre zu ausführlich. Die gleiche Antwort kann auch je nach Gesprächspartner verschieden kooperativ sein. Die Antwort *Ein Buch* kann in vielen Fällen ausreichend sein. Die Antwort *Maiers Lehrbuch der Funktionentheorie* kann bei einem Kollegen adäquat sein, bei einem Nichtfachmann aber doch zu viele Informationen enthalten.

Durch selbst formulierte und substantielle Sprachäußerungen tragen die Schüler nicht nur aktiv zum gemeinsamen Wissensaufbau in der Klasse bei, sondern sie setzen auch ihre subjektiven Interpretationen und Definitionen der jeweiligen Gesprächssituation, ihre individuelle Auffassung und ihr Verstehen der mathematischen Inhalte der Bewährung und der Kritik aus und öffnen sie so für eventuell nötige Korrekturen. Bezüglich ihrer Sprachproduktion soll nachfolgend zwischen der Förderung des mündlichen Ausdrucks (4.3.1) und der Förderung der Textproduktion (4.3.2) unterschieden werden.

4.3.1 Mündliche Sprachproduktion

Die unter 4.1 angestellten Überlegungen lassen es für die Schüler wichtig erscheinen, sich regelmäßig und ausführlich mit eigenen Sprachbeiträgen in die unterrichtliche Kommunikation einzubringen. Sie sollen das im Rahmen der verbalen Interaktion aus eigenem Antrieb tun,

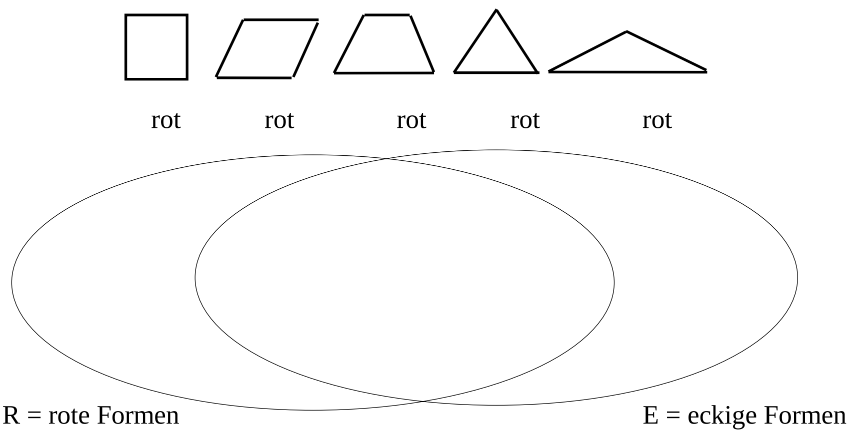
– wenn sie eine Lehrerfrage sachgerecht und treffend beantworten können,
– wenn sie durch geeignete Instruktionen oder Lernsituationen angestoßene Beobachtungen oder gewonnene Einsichten mitzuteilen haben,
– wenn sie eine mathematische Aufgaben- oder Problemstellung mit eigenen Worten formulieren, über versuchte bzw. gefundene Arbeits- bzw. Lösungswege sowie Ergebnisse berichten können oder
– wenn sie in anderer Weise zweckdienlich und substantiell zur Kommunikation beizutragen vermögen.

Die verbalen Äußerungen der Schüler sollten folgende Merkmale aufweisen:

– Sie sollten überlegt sein, d. h. ihnen sollte eine Phase des Verstehens und der Reflexion vorausgehen.
– Sie sollten zusammenhängend und explikativ sein, d. h. Gedanken in angemessener Ausführlichkeit erklärend und allgemeinverständlich darstellen.
– Sie sollten argumentativ sein, d. h. wo immer nötig über die bloße Beschreibung hinaus Aussagen begründen und Schlussfolgerungen offen legen.

Wichtig erscheint für die Schüler auch die Erfahrung, dass sich der gleiche Sachverhalt in verschiedener Weise ausdrücken lässt. Das Variieren inhaltsgleicher Sprachäußerungen in der Formulierung durch den Sprecher selbst oder durch andere Gesprächsteilnehmer im Sinn eines intramodalen Transfers eigener oder fremder Darbietung bietet auch Anlass wie Gelegenheit zur Verbesserung der Klarheit und Präzision. Darüber hinaus ist es ein wichtiges Mittel zur Förderung der Sprachverstehens. Beispiele:

- Die Schüler sollen Formen in ein Mengendiagramm einordnen:

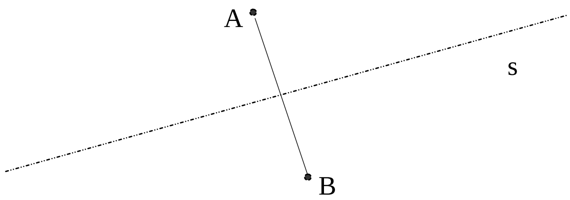


Was gehört zu R? Was gehört zu E?

Die Bearbeitung der in der Abbildung gezeigten Aufgabe führt zu einer Situation der Mengengleichheit. Für sie stehen den Kindern verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten offen. Verschiedene Formulierungen aus einem Unterrichtsprotokollen: „Da ist kein Unterschied." – "Alle gehören dahin, wo sich die zwei Felder überschneiden." – "Alle Eckigen sind auch rot." – "Alle gehören in das R-Feld und in das E-Feld." – "Zu R und zu E gehört das gleiche." – "Die Roten und die Eckigen sind die gleichen."

Alle diese Beschreibungen drücken eine Beobachtung bzw. Einsicht so aus, dass sie ein Mitschüler mit seiner eigenen Erfahrung in Verbindung zu bringen und die Übereinstimmung mit ihr zu prüfen vermag. Sprechweisen wie "die Menge der Roten und der Eckigen sind gleich" oder, noch kürzer, "R ist gleich E" sind nicht an sich eindeutiger, sondern nur dann, wenn sich zahlreiche entsprechende Erfahrungen bereits mit ihnen eng verbunden haben und sie als Konvention zum Ausdrücken dieser Erfahrungen angenommen wurden.

- Ein Punkt A wird an der Achse s gespiegelt. Der Lehrer bzw. die Schüler können den Sachverhalt unterschiedlich kommentieren (nach WALSCH, 1967):
  - ∗ Die Verbindungsstrecke zweier symmetrischer Punkte steht senkrecht auf der Symmetrieachse:



  - ∗ Wenn A und B bezüglich s symmetrisch liegen, dann ist AB ⊥ s.
  - ∗ A und B können keine symmetrischen Punkte bezüglich s sein, wenn AB nicht senkrecht auf s steht.
  - ∗ Es ist unmöglich, dass AB nicht auf s senkrecht steht und trotzdem A und B bezüglich s symmetrische Punkte sind.
  - ∗ Wenn AB nicht auf s senkrecht steht, dann sind A und B bezüglich s nicht symmetrisch zueinander.
  - ∗ AB steht auf s sicher dann senkrecht, wenn A und B bezüglich s symmetrisch zueinander liegen.
  - ∗ A und B sind nur dann bezüglich s symmetrische Punkte, wenn AB ⊥ s ist.

Nun hat die aktive Teilnahme des einzelnen Schülers an der verbalen Kommunikation im Unterricht den Vorteil, dass er seine Auffassung und sein Verstehen der Gesprächsinhalte sofort kontrollieren kann, denn Rückmeldungen auf seine Äußerungen erfolgen zumeist unmittelbar. Diese Situation unterliegt aber auch einigen Einschränkungen. Zum einen kann sich in einer Klasse mit vielen Gesprächsteilnehmern der einzelne Schüler nicht häufig genug äußern; zum zweiten ist für ihn die verfügbare Überlegungs- bzw. Reflexionszeit oft zu kurz. Daher scheint es wichtig, dass die Schüler sich regelmäßig und ausführlich auch in schriftlicher Form zu mathematischen Sachverhalten äußern.

4.3.2 Textliche Eigenproduktionen

Eine für die Sprachförderung im Mathematikunterricht bedeutsame und, vor allem in anglikanischen Ländern zunehmende praktizierte Schüleraktivität ist das Schreiben über Mathematik; nachfolgend wird, in Anlehnung an SELTER (1994), von textlichen Eigenproduktionen gesprochen. Was ist damit gemeint und was kann man sich von ihnen versprechen?

a) Charakterisierung von textlichen Eigenproduktionen

Das, was die Schüler im Mathematikunterricht schreiben, beschränkt sich im Allgemeinen auf das Notieren von Lösungsschritten und Ergebnissen mathematischer Aufgaben oder Probleme in fachlicher Symbolsprache. Solche formalisierte Lösungsprotokolle lassen sich zu textlichen Eigenproduktionen erweitern, indem die Schüler etwa unter Einbeziehung alltagssprachlicher Formulierungen die Problemstellung bzw. das Lösungsziel, die Lösungsschritte – evtl. auch der erfolgreichen Bearbeitung vorausgegangene Umwege und Irrwege – sowie das Ergebnis ausführlich beschreiben sowie Lösungsschritte erläutern und begründen. Ein einfaches Beispiel ist das Kommentieren von algebraischen Term- und Gleichungsumformungen, wobei die einzelnen Umformungsschritte in Worten beschrieben, ihr Ziel erläutert und ihre Zulässigkeit begründet wird, z. B. durch Angabe der angewendeten Rechengesetze und Rechenregeln (siehe POWELL & RAMNAUTH 1992). MORGAN (1996) zufolge sollten die Schüler auch angeleitet werden, bei ihrer Darstellung graphische Mittel wie Tabellen oder Diagramme einzusetzen und wirklich alles beschreiben, was sie getan haben.

Doch müssen sich textliche Eigenproduktionen überhaupt nicht auf Problemlöseprotokolle beschränken. Ihr Thema können auch Erklärungen, Beschreibungen, Berichte und Argumentationen aller Art sein. DAVIDSON & PEARCE (1983) unterscheiden fünf Arten des Schreibens bzw. fünf Textsorten, die Schüler produzieren können:

– Das Wiedergeben von vorgelegten Texten aus Schulbüchern oder durch Lehrerdiktat ins Schülerheft (direct use of language),
– das Übersetzen von mathematischen Symbolen in verbale Sprache, das Formulieren der Ergebnisse von Sachaufgaben oder das Verbalisieren der Schritte eines Algorithmus (linguistic translation),
– das Paraphrasieren eines Schulbuchtextes, das Zusammenfassen eines Gesprächs, das Führen eines Tagebuchs oder das Erklären eines mathematischen Begriffs (summarising),
– das Anwenden einer mathematischen Idee in einem neuen Problemkontext, das Erfinden von Sach- oder Prüfungsaufgaben zu einem bestimmten Thema (applied use of language),
– das Verwenden der Sprache zum Erklären und Übermitteln von Wissen, das mathematische Begriffe oder Sachverhalte beinhaltet, die im vorausgehenden Unterricht nicht behandelt wurden (creative use of language).

MANNING (1996) beschreibt vier Arten von textlichen Eigenproduktionen so:

– „Content journals provide a way for students to review or interpret information discussed in class or read in a text“.
– Im Fall von „written conversations“ bittet der Lehrer die Schüler in Partnerarbeit, „to ask their partners to write a comment or question about the class discussion or about something from their text.“ Beispielsweise sollen sich die Schüler darüber austauschen, was die Bezeichnungen parallel und senkrecht bedeuten.
– „Letter writing“ bedeutet, dass Schüler verschiedener Schulen, z. B. über Computer, sich Briefe schreiben, in denen sie Fragen zu einem vertrauten Thema stellen bzw. auf entsprechende Fragen antworten.
– „Informal reports“ sind eine Art Aufsatz zu verschiedensten Themen des Unterrichts. Die Schüler könnten Preislisten erstellen, Ergebnisse von Spielen oder Sportereignissen darstellen, Argumente für einen mathematischen Satz zusammentragen, Geschichten über seltsame mathematische Lösungen erfinden, mathematische Inhalt erklären, eine Rede zu einem mathematischen Thema vorbereiten, usw.

Textliche Eigenproduktionen bieten eine gute Gelegenheit für die Schüler, sich nicht nur über mathematische Inhalte selbst, sondern über ihre persönlichen Beziehungen zu ihnen und ihren Umgang mit ihnen zu äußern. KASPER & LIPOWSKY (1997) ließen die Schüler im Rahmen eines Projekts Lerntagebücher schreiben, in denen sie u. a. zu folgenden Fragen Stellung nehmen sollten:

– Welches der Aufgabenangebote hat dir gefallen und warum? Welches hat dir nicht so gefallen und warum?
– Was hast du Neues erfahren? Was weißt du nun, das du vorher noch nicht wusstest?
– Hattest du auch Schwierigkeiten und Probleme? Wie hast du dir geholfen?

Bei textlichen Eigenproduktionen darf die sprachliche Formulierung nicht durch das Befolgen vorgegebener oder erlernter Darstellungsnormen geprägt sein, sondern die Schüler müssen sich eigenständig der ihnen aktiv verfügbaren Sprachmittel bedienen. Schließlich sollte der produzierte Text nicht so sehr an einen Experten (den Lehrer) adressiert sein, dem der Inhalt bereits bekannt ist und dem man nur zu zeigen braucht, dass man fähig ist, die von ihm erwartete Aufgabenlösung korrekt auszuführen. Stattdessen müssten sich die Schüler als Adressaten einen ‘Unwissenden’ vorstellen, für den die Problemlösung oder der geschilderte Sachverhalt neu ist und der daher explizit, ausführlich und in verständlicher Sprache informiert werden muss. Dazu kann es anfangs hilfreich sein, die Textproduktion in geeigneter Weise zu motivieren. Beispiele:

– Der Text soll ein Brief an einen erkrankten Schüler sein, der mit seiner Hilfe versäumten Stoff nachholen kann, oder an Bewohner eines Landes oder Sterns, in dem Mathematik im allgemeinen oder dieses Thema im besonderen unbekannt sind; Themenbeispiele: "Wie ich die Division 2753 : 5 ausführe", "Ich zeichne zu einer Geraden die Senkrechte durch einen Punkt", "Wie ein Dreieck an einer Achse gespiegelt wird", "Wie man ein Dreieck konstruiert, dessen Seiten 7 cm, 5,5 cm und 4 cm lang sind“;

- Der Text soll die Gestalt eines Posters für eine mathematische Ausstellung erhalten; Themenbeispiele: "Die Primzahlen stellen sich vor", "Winkelzüge - alles über Winkel"; „Gestreckt und gestaucht – über die Zentrische Streckung“;
- Der Text soll die Gestalt eines Lexikonartikels haben; Themen: "Bruchzahlen", „Funktionen“, „Vektoren“, „Geometrische Grundkonstruktionen“, usw. (siehe z. B. WITTMANN 1996)

Zumeist werden textliche Eigenproduktionen nur bei Gelegenheit in den Mathematikunterricht eingestreut. Sie können aber auch als regelmäßige Aktivität vorgesehen sein. WAYWOOD (1992) berichtet nämlich über das Führen von Berichtsheften (journals). Er motiviert dies mit einem Zitat von *Bell & Bell*, die sagen: „By encouraging students to explain themselves in clear coherent prose, exposition allows them to become more aware of their thinking process and more conscious of the choices they are making as there carry out the computation and analysis involved in solving math problems“ (p. 220). Im Rahmen eines experimentellen Einsatzes der Textproduktion im Mathematikunterricht der Sekundarstufe schrieben die Schüler vor allem drei Arten von Berichtstexten: ‘Rechenschaftsberichte’, in denen sie über das berichteten, was sich im Unterricht ereignet hatte, Zusammenfassungen, in denen Inhalte kodifiziert, z. B. Begriffe definiert oder Verfahren erläutert wurden, und Dialoge, in denen Argumente vorgetragen und eigene Überlegungen mitgeteilt wurden. Die Schüler benutzten ihre Berichtshefte in verschiedener Weise um zusammenzufassen, Beispiele zu sammeln, Fragen zu stellen und Probleme zu erörtern. Die gewonnenen Erfahrungen lassen es dem Autor geboten erscheinen, den Schülern ein klares Bild über die mit den Berichten verbundenen Absichten zu vermitteln, ihnen genügend Unterrichts- und Hausaufgabenzeit zur Verfügung zu stellen und dem Führen der Berichtshefte einen ebenso hohen Stellenwert einzuräumen wie den übrigen Unterrichtsinhalten. Das Projekt sollte von allen Mathematiklehrern einer Schule getragen werden.

MILLER (1992) ließ im Rahmen eines Projekts mit drei Lehrern in 9. bis 12. Klassen die Schüler in jeder Mathematikstunde für jeweils fünf Minuten einen improvisierten Text zu einer algebraischen Aufgabe schreiben. Er untersuchte die Frage, was Lehrer vom Lesen solcher Schülertexte lernen und wie weit dieses ihren Unterricht verändert. Fallstudien zeigten, dass die Schülerberichte den beteiligten Lehrern vielerlei Schwierigkeiten enthüllten, die ihnen vorher entgangen waren, dass sie sich stärker den Problemen der einzelnen Schüler zuwandten und sich bei der Planung und Gestaltung ihres Unterrichts in vielerlei Weise auf dieses zusätzliche Wissen einstellten. Sie setzten öfter Wiederholungen zu bestimmten Inhalten an, verschoben Prüfungen, weil die Schülertexte Mangel an Verständnis widerspiegelten, führten persönliche Gespräche mit einzelnen Schülern, bei denen sich Fehlbegriffe zeigten, und ließen auch oft während der Unterrichtsstunden Schüler Texte schreiben, um sich zu vergewissern, was sie aufgefasst und verstanden hatten. Nicht zuletzt wandten sie ihrer eigenen Sprache größere Aufmerksamkeit und größere Sorgfalt zu. Sie behielten auch nach Beendigung des Projekts die Schreibaktivitäten zu Beginn der Unterrichtsstunde bei, weil diese offenbar den Schülern auch den Übergang von vorausgehenden Unterrichtsstunden zum Mathematikunterricht erleichterten.

GALLIN & RUF (1993) nennen die Texte, die sie ihre Schülern regelmäßig schreiben lassen, Einträge in ein ‘Reisetagebuch’. Im Rahmen eines Kooperationsprojekts von Mathematik- und Deutschunterricht schreiben Schüler zu so genannten ‘Kernideen’; das sind Fragestellungen, die „dem produktiven Menschen Antrieb und Richtung“ geben (S. 10). Der Mathematiklehrer versucht die Schüler dafür zu gewinnen, dass sie über in ihnen wirksame Kernideen nachdenken, und sie anzuregen, „Kernideen zu generieren, die eine fachliche Auseinandersetzung ermöglichen“ (ebenda). Die Autoren geben Beispieltexte zu folgenden Fragestellungen: „Suche auf dem Schneidermeter deine Lieblingszahl. Male ein Bild dazu! Warum gefällt dir diese Zahl besonders gut?“ – „Wie viele Nadeln hat dieser Ast? Schätze die Anzahl und erkläre, wie du beim Schätzen vorgegangen bist. Mache zur

Erklärung eine Zeichnung". – „Mache diese 18 Brüche gleichnamig". Ein Tagebucheintrag sollte folgende Elemente enthalten: Datum (Wann habe ich diesen Eintrag gemacht?), Thema (Womit befassen wir uns?), Auftrag (Was muss ich tun?), Orientierung (Wozu machen wir das?), Spuren (Welchen Weg beschreite ich bei der Lösung des Auftrags?), Rückblick (Wo stehe ich jetzt?). Wichtig ist, dass die Schüler zu jedem ihrer Tagebucheinträge eine Rückmeldung durch den Lehrer erhalten; er signalisiert Reaktionen, gibt Tipps, formuliert Beurteilungen. In manchen Fällen kann die Rückmeldung auch durch Mitschüler erfolgen.

PHILLIPS & CESPO (1996) organisierten länger andauernde Brieffreundschaften (Austausch von „pen pal letters") zwischen Schülern einer 4. Jahrgangsstufe und Lehrerstudenten. Dort sollten die Partner sich gegenseitig bekannt machen, erzählen, was sie im Fach Mathematik gern oder weniger gern mögen und was sie gerne darüber lernen möchten und Aufgaben einschließen, mit deren Lösung man Schwierigkeiten hat und die man als interessante Herausforderung für den jeweils anderen empfindet. Weitere Anregungen mit Beispielen für textliche Eigenproduktionen finden sich bei SKYPEK (1981).

b) Gründe für textliche Eigenproduktionen

Die Notwendigkeit, mathematische Sachverhalte sprachlich, insbesondere schriftlich darzustellen, regt die Schüler an, sich diese in besondere Weise bewusst zu machen, sie zu analysieren und verstehend zu durchdringen. Dies gilt für sprachliche Darstellung allgemein, für textliche Eigenproduktionen im Besonderen. Denn der Text gibt den Studenten die Möglichkeit, ihr Denken und die Entwicklung ihrer Ideen zu dokumentieren (PIMM 1987, S. 115). Das Schreiben, meint PIMM, verleihe dem Denken einen noch fassbareren Ausdruck als das Sprechen, da eine genauere Darstellung der Ideen verlangt wird. Es fördert die Reflexion mathematischer Begriffe und Sachverhalte, lässt sie Schüler neuen Verknüpfungen herstellen und führt damit zur verstehenden Konstruktion neuen Wissens. SWINSON (1992) zitiert *Borns*, nach deren Meinung das Schreiben die Schüler dazu befähige, ihr Denken und Verstehen zu erklären, zu klären, zu bestätigen und auszuweiten, sowie *Hoffman & Powell*, denen zufolge die Mathematik für die Schüler mittels der Reflexion auf ihr Verstehen von Begriffen und Prozessen Bedeutung gewinne. Auch DAVIDSON & PEARCE (1983) verweisen auf Autoren, die das Schreiben der Schüler über mathematische Sachverhalte als nützlichen und wertvollen Aspekt des Unterrichts betrachten (*Watson*, *Greenius*, *Johnson*, *Shaw* und *Burton*), weil es das Erlernen neuen Wissens fördere.

Das selbständige Formulieren von Geschriebenem verlangsamt gleichsam den Prozess der sprachlichen Äußerung und lässt dem Schüler Zeit, seine Beobachtungen zu strukturieren, seine Gedanken zu sammeln und zu ordnen sowie sorgfältig und überlegt darzustellen. Weit mehr als die mündliche Äußerung gibt ihm die Textproduktion Gelegenheit, seine Sprachmittel bewusst auszuwählen und auch den Gebrauch fachsprachlicher Mittel zu erproben, die gleichsam erst auf dem Weg von seinem passiven in seinen aktiven Sprachschatz sind. So kann sie die fachsprachliche Kompetenz fördern und entwickeln helfen.

Die Fixierung eines herzeigbaren und überprüfbaren Textes erlegt dem Verfasser eine besondere Verantwortung für das von ihm Geschriebene auf. Vor allem, wenn er als Adressaten einen 'Unwissenden' im Auge hat, wird er sich um besondere gründliche Überlegung und sorgfältige Formulierung bemühen. Zugleich gibt ihm der Text Gelegenheit, sein Wissen, sein Verstehen und seine Argumente der Bewährung auszusetzen, um sie gegebenenfalls zu überprüfen und zu modifizieren. Auch wenn er Rückmeldungen in diesem Fall oft erst mit deutlicher zeitlicher Verzögerung erhält, können diese dafür gründlicher und sorgfältiger auf seine Darstellung eingehen. Die explikative Darstellung verschafft andererseits dem Lehrer die Möglichkeit, sich gründlicher als sonst möglich über das Wissen und Verstehen seiner Schüler zu informieren.

SWINSON (1992) weist dem Schreiben fachlicher Texte durch Schüler im Mathematikunterricht eine wichtige Kontrollfunktion zu. Es sei geeignet, das Vorverständnis der Schüler zu mathematischen Begriffen und Sachverhalten aufzudecken und etwaige Fehlbegriffe zu korrigieren bzw. zu modifizieren, ehe neues mathematisches

Wissen auf seiner Basis konstruiert wird. Anderseits versetze eine sprachliche Wiederholung durch die Schüler im Anschluss an die Wissensvermittlung den Lehrer in die Lage zu erkennen, wie diese das zu vermittelnde Wissen aufgefasst haben, und eventuelle Fehlauffassungen zu beseitigen. Schließlich sei Schreiben sogar ein gutes Mittel der Leistungsbewertung (siehe auch MORGAN 1996). Hierzu gibt es allerdings auch kritische Stimmen, die darauf verweisen, wie unterschiedlich sich Schülertexte interpretieren und demzufolge bewerten lassen. (Dies gilt freilich auch für traditionelle Mittel der Leistungsbewertung.) Ernster zu nehmen ist der Einwand, dass mit dem Gebrauch als Mittel der Leistungsbewertung die textliche Eigenproduktion bei den Schülern diskreditiert und damit eines Großteils der oben beschriebenen positiven Wirkungen beraubt wird.

c) Hinführung der Schüler zu textlichen Eigenproduktionen

Textliche Eigenproduktionen sind keine unterrichtsmethodische Selbstverständlichkeit. Schüler, die dieser Form von Eigenaktivität erstmals begegnen, können ihr mit viel Reserve begegnen und erhebliche Schwierigkeiten mit ihr haben. Dies gilt vor allem, wenn dies in höheren Jahrgangsstufen geschieht, wo sich bei den Schülern schon eine feste Vorstellung davon entwickelt hat, was Mathematiklernen bedeutet und welche Aufgaben man in diesem Fach erwarten darf. Da kann das Ausbrechen aus dem Schema des permanenten (übenden) Lösens von Aufgaben, zu deren Bearbeitung man vorausgehend eine feste Verfahrensnorm erlernt hat, eine erhebliche Hürde darstellen.

Aus diesem Grund sollte die textliche Eigenproduktion im Mathematikunterricht sehr bald – spätestens in der zweiten Grundschulklasse – einsetzen und zu einer immer wieder geübten Aktivität gemacht werden. Vier Hilfen bieten sich an:

- Beim Erlernen neuer Rechenverfahren und anderen mathematischen Wissens sollte die Einführung in die Kurzsprache der fachlichen Symbolik eher zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen, so dass vorausgehend für einige Zeit mit ausführlicheren Texten gearbeitet werden muss.
- Die Eigenproduktion müsste mit kleinen und kurzen Texten beginnen; Länge und Komplexität der Texte können dann nach und nach gesteigert werden. Dies gilt nicht zuletzt auch für den Fall eines in der Schullaufbahn verspäteten Einstiegs in diese Aktivität.
- Die Textproduktion sollte gut motiviert werden. Beispielsweise kann man, anstatt Begriffserklärungen trocken formulieren zu lassen, Begriffe „personalisieren“ und den Text als Drehbuch eines Rollenspiels oder als ein Streitgespräch auffassen. Themenbeispiele: "Pyramide und Prisma streiten über ihren Körperbau", "Gleichschenkeliges und rechteckiges Dreieck im Gespräch", "Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche legen ihre Vorzüge dar".
- In solchen, wie in vielen anderen Fällen ist es gut, die Textproduktion mündlich vorzubereiten.

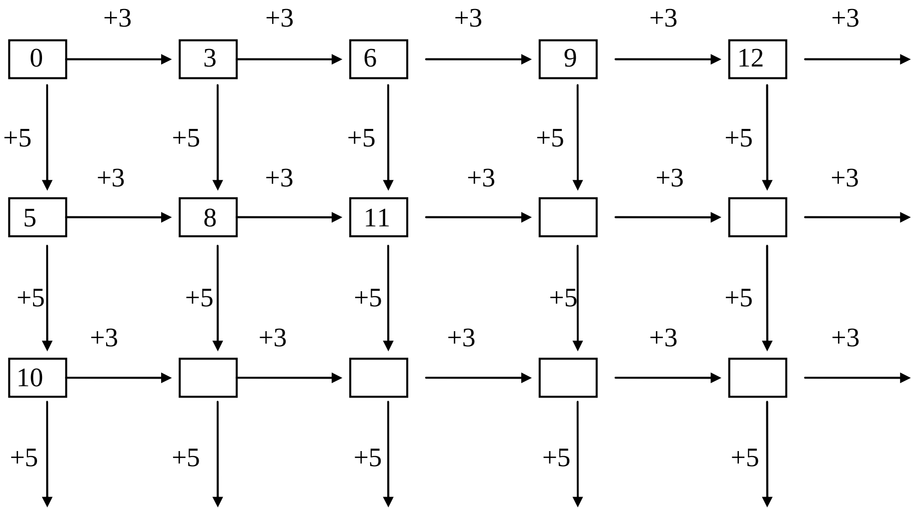
d) Themenbeispiele

Textliche Eigenproduktionen können andere mathematische Aktivitäten begleiten oder aus ihnen herauswachsen; sie können aber auch direkt als Sprachprodukte veranlasst sein. Nachfolgend sollen verschiedene Formen anhand von Beispielen vorgestellt werden.

- *Untersuchungsberichte*

Die Schüler erhalten – einzeln oder in Kleingruppen zu zwei bis vier Schülern – eine mathematische „Untersuchung“ (englisch: ‘investigation’) zur Bearbeitung und verfassen dabei einen Text, in welchem sie die Aufgaben, die ihnen gestellt wurden oder die sie sich selbst gestellt haben sowie die Beobachtungen, die sie gemacht haben, und die Einsichten und die Ergebnisse, zu denen sie gekommen sind, ausführlich darstellen. Ein solcher Untersuchungsbericht kann auch mündlich für die Klasse gegeben werden. In der Regel soll er jedoch schriftlich formuliert und zur Verteilung an die Mitschüler, in Form eines Posters für eine Ausstellung oder als Grundlage der Leistungsfeststellung für den Lehrer gestaltet sein. Beispiele solcher Untersuchungsaufgaben sind:

(1) Schüler erstellen ein Zahlengitter, das durch die Operatoren +3 und +5 etwa in folgender Weise definiert ist:



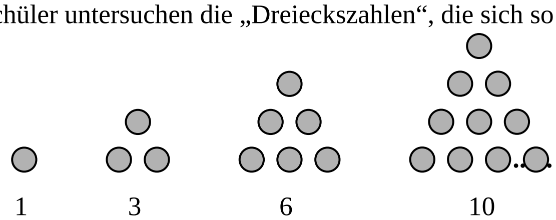
Mögliche Fragen, die gestellt werden können oder die sich die Schüler selbst stellen sind u. a.:

- Welche Zahl steht an einer vorgegebenen Stelle im Gitter (z. B. in der 3. Reihe und 7. Spalte)?
- Wo steht im Gitter die Zahl ... (z. B. 111)? Steht sie auch an anderen Stellen? Wenn ja, wo?
- Wir oft kommt die Zahl ... (z. B. 111) im Gitter vor?
- Wie erreicht man die Zahl ... von 0 aus auf dem kürzesten Weg?
- Gibt es Zahlen, die im Gitter nicht vorkommen? Welche sind dies?

(2) Schüler untersuchen Folgen von Ausfällen

- bei n Würfen mit einer Münze (Wappen oder Zahl) oder einer Reißzwecke (Kopf oder Spitze)
- bei n Würfen mit zwei Würfeln (Punktsummen)
- bei n Bewegungen an einem Glücksrad
- bei n Ziehungen aus einer Urne mit verschiedenfarbigen Kugeln, usw.

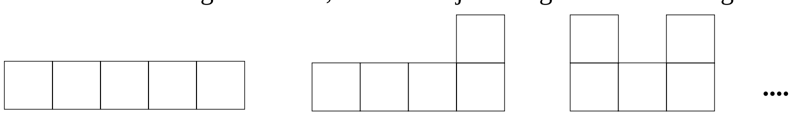
(3) Schüler untersuchen die „Dreieckszahlen“, die sich so darstellen lassen:



Mögliche Untersuchungsfragen:

- Wie heißen die 5. bis 10. der Dreieckszahlen?
- Wie heißt die 18. (45., 70., ...) Dreieckszahl?
- Die wievielte Dreieckszahl ist 378?
- Ist 290 eine Dreieckszahl?

(4) Schüler untersuchen „Pentominos“, d. h. Figuren (z. B. aus Pappe ausgeschnitten), die aus genau fünf Quadraten zusammengesetzt sind, von denen je zwei genau eine Seite gemeinsam haben:

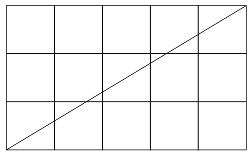


Mögliche Fragen:

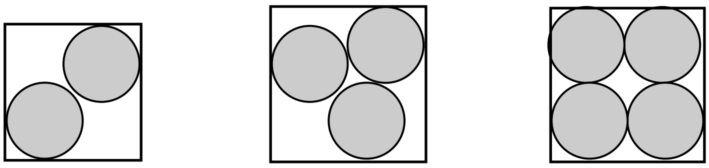
- Wie viele verschiedene Pentominos gibt es? Stelle sie aus Pappe her!
- Welche Figuren kann man aus zwei (drei) verschiedenen Pentominos zusammensetzen? Zeichne sie auf!
- Lässt sich mit Pentominos ein Rechtecke (Quadrat) legen?
- Lassen sich folgende Figuren (Vorgabe) mit einem Satz Pentominos parkettieren?

(Man kann die Untersuchung mit Figuren aus drei oder vier Quadraten beginnen und mit Figuren aus sechs Quadraten fortsetzen.)

(5) Durch quadratisch gerasterte Rechtecke werde eine Diagonale gezogen. Wie hängt die Anzahl der Quadrate, die von dieser Diagonalen geschnittenen werden, von der Anzahl der Quadrate längs der beiden Rechteckseiten ab?



(6) Schüler untersuchen folgendes Problem: In einem Betrieb sollen zylinderförmige Dosen mit vorgegebenem Durchmesser (d) in Kisten mit quadratischer Grundfläche einschichtig eingepackt werden. Zu diesem Zweck sind Kisten mit möglichst kleiner Grundfläche herzustellen, in denen man n = 2, 3, 4, ... dieser Dosen unterbringen kann. Welche Kantenmaße müssen die Grundflächen dieser Kisten haben?



(7) Schüler untersuchen folgende Frage: Gilt der Lehrsatz des Pythagoras auch dann, wenn über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gleichseitige Dreiecke, Halbkreise, rechtwinklige Dreiecke (welche?), Rechtecke (welche?) errichtet werden?

In die Gruppe der Untersuchungsberichte passen auch Berichte über die mathematischen Arbeiten und Arbeitsergebnisse eines sog. Lernzirkels oder eines fachübergreifenden Unterrichtsprojekts. BORASI & SIEGEL (1994) berichten über ein Unterrichtsprojekt des entdeckenden Lernens, in dem die Schüler – motiviert durch eine öffentliche Volkszählung in den USA – für ihre eigene Schule eine besondere ‘Volkszählung’ planten, durchführten und auswerteten, um dabei in grundlegende Begriffe und Verfahren der beschreibenden Statistik eingeführt zu werden. In Verbindung mit diesem Projekt lasen und schrieben die Schüler Texte folgender Art: Aufsätze, Zeitungsartikel, Geschichten, Berichte, Tabellen, Grafiken, Fragebogen, Tagebücher und in der Klassendiskussion erarbeitete Fragenkataloge. Dabei war das Schreiben zu keiner Zeit nur eine Tätigkeit für den Lehrer oder zum Zweck des Leistungsnachweises; die Schüler verfolgten stets eine sehr spezifische Absicht und richteten sich mit ihren Texten an ein besonderes Publikum – alles Faktoren, die Inhalt, Form und Stil des Schreibprodukts bestimmten. Das Schreiben erwies sich so nicht nur als zweckmäßig, sondern als schöpferisch in dem Sinn, dass es den Verfassern half, ihre Gedanken zu organisieren und anzuregen. Sie erhielten Rückmeldung zu ihren Texten, die sie veranlassten, mehr auf den Inhalt als die äußere Form zu achten. Die Schüler lasen spezifische Texte, die ihnen Modelle für ihre eigenen Sprachprodukte lieferten und die eine besondere Beziehung zu ihrem speziellen Projekt hatten. Sie konnten aus ihnen relevante Daten entnehmen, mit ihrer Hilfe aber auch eigene Sprachprodukte revidieren. Dieser mehrfache Zweck lenkte den Blick beim Lesen vom bloßen zur Kenntnis nehmen einer Information hin auf schöpferische Sinnbildung. Die Texte ermutigten die Schüler, in Gruppengesprächen sich über ihre Interpretationen, Hypothesen und hergestellten Gedankenverbindungen auszutauschen. Auf diese Weise waren Lesen und Schreiben dazu angetan, das Verständnis der Schüler für ihren Untersuchungsgegenstand zu vertiefen, Fragen anzuregen, Lösungswege zu finden, sich mathematische Begriffe und Verfahren anzueignen, die zur Lösung benötigt wurden, gefundene Ergebnisse besser zu organisieren, zu durchdenken und in geeigneter Weise mitzuteilen. Schließlich veranlasste es die Schüler, sowohl über den Prozess als auch über das Produkt ihrer entdeckenden Lernarbeit intensiv nachzudenken.

– *Begriffs- und Verfahrensbeschreibung*

In diesem Fall werden die Schüler aufgefordert, in einem zusammenhängenden Text einen oder einige zusammengehörige, im Unterricht besprochene mathematische Begriffe bzw. ein erlerntes Verfahren ausführlich zu beschreiben. SWINSON (1992) weist z. B. auf folgende Möglichkeiten hin: Die Schüler setzen angefangene Sätze fort (*Beschreibe in eigenen Worten, warum ....* oder *Erkläre den Prozess, mit dessen Hilfe du* ...), schreiben kurze Darstellungen von wenigen Zeilen (prompts) oder Briefe, in denen einem abwesenden Schüler mathematische Sachverhalte erklärt werden. In diesen Formen sieht er auch eine gute Möglichkeit, das Schreiben als Mittel der Leistungsfeststellung einzusetzen.

Als BAUER (1988) eine 8. Gymnasialklasse bat, die irrationalen Zahlen zu beschreiben, entstanden u. a. folgende Texte:

- "Irrationale Zahlen sind unendlich. Man kann sie nicht in gewöhnliche Brüche umwandeln. Irrationale Zahlen sind das Gegenteil von rationalen Zahlen, die man in Brüche umwandeln kann. Die irrationalen Zahlen umfassen die ganzen Zahlen. Irrationale Zahlen kann man z.B. beim Wurzelziehen bekommen. Irrationale Zahlen kann man auch nicht auf der Zahlengerade zeichnen. Mir hat das Thema besser gefallen, weil ich mir nicht vorstellen konnte, dass z.B. immer auf der Zahlengerade Lücken bleiben."
- "Irrationale Zahlen sind Zahlen, die sich nicht in Brüche umformen lassen. Das ist eigentlich im Großen und Ganzen das meiste, was ich noch davon weiß. Dieses Thema haben wir eigentlich lange behandelt, wir hatten es sogar in der Schulaufgabe dran. Und das ist größtenteils das meiste, das ich noch davon weiß. Traurig ist das. Unendliche, nicht periodische. Besser gesagt sind es Dezimalbrüche (eine Zahl also, mit einem Komma, hinter dem sich immer neue Zahlen auftürmen), die sich nicht in echte Brüche (also etwas mit einem Bruchstrich a/b), umwandeln lassen. Mal sehen, ob ich ein Beispiel finde. Hier: 32,21567968.. Das ist eine irrationale Zahl. Sie hat eine Kommastelle, und unendlich nicht periodische Zahlenreihen dahinter. Das Thema hat mir eigentlich sehr gut gefallen, weil ich es irgendwann mal verstanden habe."
- "Irrationale Zahlen kann man nicht als Bruch schreiben (im Gegensatz zu rat. Zahlen). Alle irrationalen Zahlen können Wurzeln etc. sein, aber niemals ganze Zahlen und Brüche. Multipliziert man eine irrationale Zahl wieder mit einer irrationalen Zahl, kommt wieder eine irrationale Zahl heraus; ebenso, wenn man eine irrationale Zahl mit einer rationalen Zahl multipliziert. Das alles gilt auch für dividieren, subtrahieren und addieren. Irrationale Zahlen sind unendlich und man kann sie deshalb nie genau sagen und auch nicht auf dem Zahlenstrahl einzeichnen. Das Thema irrationale Zahl hat mich sehr interessiert. Aber auch andere Themen sind nicht weniger interessant, (wie z.B. rat. Zahlen). Ich würde aber noch gerne mehr darüber reden."

In einer 7. Realschulklasse sollten die Schüler das Abbildungsverfahren der Achsenspiegelung beschreiben; sie produzierten folgende Texte:

- "Ich nehme ein Geometrie-Dreieck und lege es mit der Ziffer des Dreiecks und der Linie, die davon ausgeht, auf die Achse s. Dann verschiebe ich es auf s solange, bis die vorn angegebene Maßeinheit mit dem Punkt A übereinstimmt. Dann schaue ich genau, wie viel cm und mm es bis zur Achse s sind, und mache auf der entgegen gesetzten Seite der Achse s einen Punkt mit der genauen Maßeinheit wie bei der Seite, wo die Punkte bereits angegeben sind. Dann wiederhole ich den Vorgang mit den anderen Punkten und verbinde sie. Dabei entsteht ein Spiegeldreieck mit der Spiegelachse s."

- "1. Ich zeichne A, B und C an beliebigen Stellen ein. Dann ziehe ich rechts daneben eine Achse.
  2. Ich steche irgendwo auf der Achse ein und schlage einen Halbkreis.
  3. Ich steche an einer Stelle, an der der Halbkreis die Achse schneidet ein, und nehme die Strecke zum Punkt B in den Zirkel. Diese Strecke trage ich auf der gegenüberliegenden Seite ab.
  4. Nun steche ich an der 2. Stelle, an der Halbkreis und Achse aufeinander treffen, ein und nehme von hier aus die Strecke zu B ihn den Zirkel. Auch diese Strecke trage ich auf der anderen Seite ab. Nun muss sie sich mit der vorherigen Abtragung schneiden. Auf diesem Punkt liegt B.
  5. Ich verfahre mit Punkt A und C ebenso wie mit Punkt B. Ich verbinde die Punkte. Das Dreieck ist gespiegelt.
  6. Was entsteht? Wenn z.B. auf der linken Seite die Spitze nach rechts zeigt, zeigt sie auf der rechten Seite nach links. Wenn ich den Umlaufsinn einzeichne, der von A nach B und von B nach C lautet, ist er auf der rechten Seite der Achse entgegengesetzt der linken. Das Dreieck ABC ist genau so weit wie das Dreieck A'B'C' von der Achse entfernt."
- "Zuerst zeichne ich eine Achse s und auf der rechten oder linken Seite ein beliebiges Dreieck. Dann benenne ich die 3 Winkel des Dreiecks mit ABC. Danach nehme ich mein Geometriedreieck zur Hand und lege es auf die Achse s, aber es muss genau mit dem Mittelstrich des Geodreiecks, also genau bei 0 und der Achse übereinstimmen, so damit sich beide Linien decken. Dann schiebe ich das Geodreieck genau zum Punkt A, immer noch übereinstimmend mit der Achse, und messe den Abstand von A zur Achse, merke mir ihn und setze den gleichen Abstand auf die andere Seite, dort wo kein Dreieck ist. Hier markiere ich dann. Wenn der Abstand z.B. 2,0 ist von A zur Achse, so muss der Abstand von A' auch 2,0 cm sein bis zur Achse. Genau dasselbe mache ich auch mit Punkt C und Punkt B, damit auf der anderen Seite C', B' herauskommt. Dann verbinde ich A', B' und C'. Wenn ich alles richtig gemacht habe, kommt das gespiegelte Dreieck heraus. Prüfen kann ich es, wenn ich einen Spiegel in die Mitte der Achse lege."

KAUER (1985) legte seinen Schülern 'Filmstreifen' vor, in denen geometrische Konstruktionen als Bildfolgen (je ein Bild pro Konstruktionsschritt) dargestellt waren. Die Schüler versuchten zuerst in einer offenen Gesprächssituation eine verbale Beschreibung des 'Films' zu geben. Dann führten sie in Kleingruppen die Konstruktionsschritte selbst aus und erstellten über ihr Vorgehen einen schriftlichen Bericht. Nach Auswertung der Berichte konnte der Lehrer den Schülern eine Gegenüberstellung verschiedener Formulierungen vorlegen und mit ihnen die Qualität der Darstellung diskutieren. Beispiel für drei Berichte mit (von 1 bis 3) steigender Qualität:

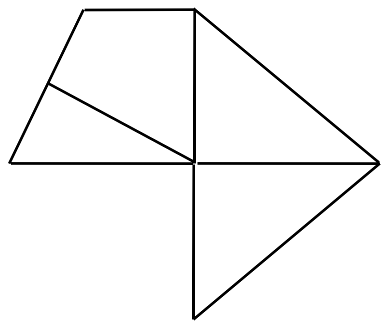
Bericht 1	Bericht 2	Bericht 3
„Ich zeichne eine Linie.“	„Zuerst zog ich mit Maßstab eine Gerade.“	„Ich zeichnete im unteren Teil des Blattes eine Gerade, die parallel war zum Blattrand.“
„Ich bestimmte ein bestimmtes Stück, einen Abschnitt AB auf der Linie.“	„Ich bestimmte die beiden Punkte A und B und zog die Verbindung stärker aus.“	„Ich bestimmte A und B und zog den Abstand rot aus. A und B sind Punkte, weil sie groß geschrieben sind.“

In die Gruppe der Verfahrensbeschreibungen lassen sich auch die geometrischen Konstruktionsbeschreibungen einordnen, die zu den wenigen Textproduktionen gehören, die seit eh und je einen Platz im (gymnasialen) Mathematikunterricht haben. Allerdings steht ihre Formulierung häufig stark unter dem Zwang einer normgerechten Darstellung. Die Konstruktionsbeschreibungen dürften den Schüler vermutlich wesentlich leichter fallen, wenn diese Aktivität mehr den Charakter einer textlichen Eigenproduktion erhält.

– *Kommunikationsanlässe*

Besonders reizvoll erscheint es, im Mathematikunterricht Situationen zu schaffen, in denen Schüler aufgrund eines kommunikativen Anlasses zu ausführlicher sprachlicher Eigenproduktion angeregt werden. Der Anlass kann spielerischen Charakter haben, wie etwa der folgende:

Von einem Schülerpaar liegt einem Partner eine Zeichnung vor (siehe verkleinertes Beispiel nebenan). Er beschreibt (als „Sender“) in einem Text für den anderen Partner (als „Empfänger“) die Zeichnung so, dass dieser sie allein aufgrund dieser Beschreibung kongruent reproduzieren kann.



Die Figur sollte so geartet sein, dass zur Beschreibung verschiedene mathematische Konzepte herangezogen werden können wie Figurenbezeichnungen, Streckenlängen und Streckenteilung, Winkelangaben, Abbildungen wie Achsenspiegelung, Schiebung, Drehung, zentrische Streckung usw. Die Paare können in einem Wettbewerb untereinander stehen, bei dem jeder Partner einmal Sender und einmal Empfänger ist, und das Paar mit den besten Reproduktionen gewinnt. Varianten dieses Kommunikationsspiels bestehen darin, dass der Sender die Beschreibung mündlich gibt, während der Empfänger zeichnet. Dabei kann erlaubt sein, dass der Sender der Zeichenarbeit seines Partners zusieht, oder dass der Empfänger Fragen stellen darf. Im letzten Fall könnte es Teil des Wettbewerbs sein, bis zur vollständigen Reproduktion mit möglichst wenigen Fragen auszukommen. [18]

– *Definieren, Hypothesen formulieren, Argumentieren und Beweisen*

Anspruchsvolle Formen der sprachlichen Eigenproduktion von Schülern sind

- das selbständige Formulieren von Definitionen für mathematische Begriffe, etwa für geometrische Figuren im Anschluss an Aktivitäten des Klassifizierens, des Beschreibens und des Hierarchisierens oder algebraischer Begriffe aufgrund einer vorausgehenden vergleichenden Analyse,
- das selbständige Formulieren von Vermutungen als Hypothesen für Lehrsätze oder Gesetzen auf der Grundlage von vergleichendem Beobachten, Aufdecken von Beziehungen und generalisierender Betrachtung,
- das ausführliche Begründen von geometrischen Konstruktionen (Konstruktionsbeschreibungen),
- das Sammeln von Argumenten für die Gültigkeit oder Allgemeingültigkeit einer Lehrsatzes bzw. eines Gesetzes und deren eventuelles Ordnen bis hin
- zum Finden eines Beweises mit der Formulierung von Voraussetzungen, Beweisschritten und Beweisergebnis.

Wie immer können die so entstandenen Schülertexte in einem anschließenden Klassengespräch miteinander verglichen und diskutiert werden. Das gibt dem Lehrer Gelegenheit, häufig auftretenden Fehlern beim Definieren, Ungenauigkeiten beim Formulieren von Sätzen sowie Lücken in Argumentationen, Schlussketten oder Beweisen aufzuspüren und sich um ihre Korrektur zu bemühen.

BORNELEIT (1981), der in zusammenhängenden sprachlichen Darstellungen der Schüler ebenfalls einen unverzichtbaren Beitrag zu einem Mathematikunterricht sieht, bei dem die Schüler - über das Kennenlernen, Verste-

[18] BALACHEFF & LABORDE (1985) zeigen, wie man die hier beschriebenen sowie andere Kommunkationsanlässe zu experimentellen Zwecken einsetzen kann (siehe Abschnitt 3.2).

hen und Verwenden mathematischen Wissens hinaus - in ihrer fachsprachlichen Kompetenz gefördert werden, stellt eine Klassifikation entsprechender Sprachhandlungen vor, die bei der Behandlung von mathematischen Verfahren und Regeln eine Rolle spielen. Im Einzelnen sind dies:

- Das Formulieren von Regeln bzw. Gesetzen, z. B. zur Addition zweier negativer rationaler Zahlen;
- das an Beispiele gebundene Erläutern, z. B. des Distributivgesetzes oder der Probe nach dem Lösen linearer Ungleichungen;
- das Begründen z. B. algebraischer Umformungen oder von Rechenwegen;
- das Beurteilen von Aussagen bzw. deren explizite Bewertung als richtig oder falsch, oft verbunden mit Kommentieren und Begründen;
- das Nennen von Lösungsmöglichkeiten und das Kommentieren von Vorschlägen, was die Analyse von Aufgaben und die Prüfung bekannter Lösungswege auf ihre Verwendbarkeit hin voraussetzt;
- das Beschreiben von Lösungswegen zu bestimmten Aufgaben;
- das Kommentieren von Lösungswegen, etwa das verbale Ergänzen nicht verbaler Informationen, das Hinweisen auf Ziele oder Teilziele einer Aufgabe, die Bezugnahme auf relevante Bedingungen oder Annahmen (Definitionen, Sätze oder Verfahren), der Hinweis auf Zwischenschritte, usw.;
- das rückschauende Verdeutlichen des Lösungsweges und gegebenenfalls Aufweisen von Möglichkeiten vorteilhafter Lösungen sowie
- die Zusammenfassung von Kenntnissen.

SCHNEITER & ZIMMERMANN (1985), ein Deutsch- und ein Mathematiklehrer, berichten, wie sie in einem fächerübergreifenden Projekt mit den Schülern an einer Definition für die Zentrische Streckung arbeiteten. Es begann im Deutschunterricht damit, dass einzelnen Schülergruppen verschieden große Reproduktionen von Bildern vorgelegt wurden und sie über ihre Beobachtungen berichten sollten. Anschließend wurden im Mathematikunterricht Dreiecke und andere geometrische Figuren vergrößert und verkleinert, die Bezeichnung *Zentrische Streckung* eingeführt und den Schülern die Aufgabe gestellt, für diese Abbildung eine Definition zu formulieren. Die so entstandenen Texte wurden dem Deutschlehrer übergeben, der sie mit den Schülern nach sprachlichen Gesichtspunkten erörterte. Schließlich wurden die verbesserten Fassungen in der folgenden Mathematikstunde mit einer Definition aus dem Schulbuch verglichen und dabei die Schülerformulierungen vor allem auf ausreichende Genauigkeit bzw. Vollständigkeit hin überprüft. Es zeigte sich, dass die Zentrische Streckung auf verschiedene Weise korrekt definiert werden kann und dass sich verschiedene Definitionen nach Zweckmäßigkeit und Verständigkeit voneinander unterscheiden lassen.

In allen Fällen sollte der Lehrer, zumindest anfangs, keineswegs auf einer fachsprachlichen Idealform bestehen, sondern mit einer präzisen Verwendung ihrer Alltagssprache zufrieden sein. Die Schüler werden nach und nach selbst erkennen, wie hilfreich fachsprachliche Mittel bei dem Versuch einer möglichst präzisen Formulierung sein können. ASHLOCK (1987) zeigt an zahlreichen Beispielen, wie man sich im Mathematikunterricht der Grundschule den Übergang von einer mehr informellen zu einer zunehmend formalen Sprache vorstellen kann. So lässt sich etwa die Wertgleichheit der Terme 5 + 3 und 2 + 6 auf folgende Weisen beschreiben: *5 + 3 meint genau so viel wie 2 + 6. – Beide Ausdrücke bedeuten gleich viel. – Beide bedeuten 8. – Beide sind Namen für 8. – Es sind verschiedene Bezeichnungen für die gleiche Anzahl.* Später kann mit verschiedenen Formulierungen das Kürzen von Brüchen gefordert werden*: Schreibe den gleichen Wert mit kleineren Zahlen. – Vereinfache den Bruch. – Schreibe den Wert in einfachster Form.* Der Autor empfiehlt, dass sich die Lehrer im Unterricht angewöhnen, informelle Äußerungen von Schülern mit etwas stärker formalisierten zu beantworten. Sagt z.B. ein Schüler über ein leeres Mengendiagramm *Das ist nichts,* so könnte der Lehrer antworten: *Ja, das sind keine Äpfel* oder *Das sind überhaupt keine Dinge, daher kann ich für die Anzahl Null schreiben.* Stellt ein Schüler im

Anschluß an eine Messung fest *Das Brett ist 7 cm lang.* so könnte der Lehrer, leicht korrigierend, antworten: *Ja, es ist ungefähr 7 cm lang.*

Vorschläge zur Sprachschulung und zum Spracheinsatz im Mathematikunterricht finden sich auch bei REICHEL (1991)

4.4 Sprachreflexion

Die Sprachreflexion wird sich im Wesentlichen auf wenige Phasen im Unterricht beschränken, in denen die Schüler gefordert sind, bewusst über Charakter und Eigentümlichkeiten eines fachlichen Sprachgebrauchs nachzudenken. Das Nachdenken kann sich beziehen

– auf unterschiedliche Bedeutung von Bezeichnungen in der Alltags- und in der Fachsprache,
– auf den Bedeutungswandel von Fachwörtern in unterschiedlichen Kontexten,
– auf die Entstehung wie Formen der Bildung von Fachausdrücken,
– auf Normen beim Umgang mit fachlichen Symbole,
– auf spezifische, von alltäglich gewohnten abweichende Strukturmerkmale oder
– auf die Logik fachsprachlicher Sätze und Texte und
– auf die Beziehungen zwischen mathematischer Verbal- und Symbolsprache.

Von Zeit zu Zeit kann eine solche Sprachreflexion schon einmal die Gestaltung einer ganzen Unterrichtseinheit nach Art der folgenden Beispiele rechtfertigen:

a) Beispiel: Reflexion über die Bedeutung von „senkrecht“

Im Rahmen einer von MAIER durchgeführten Unterrichtseinheit in einer siebenten Hauptschulklasse wurde mit den Schülern über die Bedeutung von *senkrecht* in Alltagssprache und Fachsprache nachgedacht.

Zuerst sammelten die Schüler in Partnerarbeit Sätze, in denen das Wort *senkrecht* vorkommt. Zahlreiche Beispiele solcher Sätze wurden anschließend an der Wandtafel festgehalten: *Der Turm ragt senkrecht in den Himmel. Die Fahnenstange steht nicht ganz senkrecht. Bei einem Unfall stießen zwei Autos senkrecht aufeinander. Das Wasser stürzt senkrecht vom Felsen hinab. Völlers war ein Senkrechtstarter in der (Fußball-)Bundesliga. Er schoss den Ball senkrecht in die Höhe. Das Haus steht senkrecht auf dem Hang. Mein Vater sagt immer: „Ich bin ein senkrechter Charakter“. Meine Mutter sagt: „Schlage den Nagel für das Bild senkrecht vom oberen Türrahmen herüber ein“. Damit die Tapeten senkrecht an der Wand hängen, verwendet der Tapezierer ein Lot. Die Fahne hängt senkrecht am Mast herunter. Bei einer Kiste müssen die Wände senkrecht aufeinander stehen.*

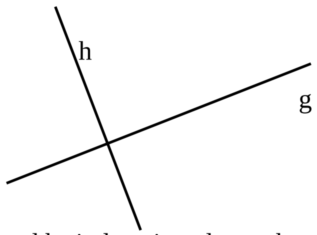
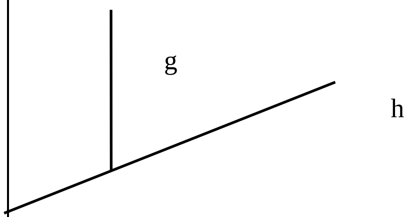
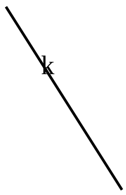
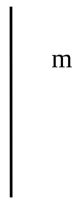
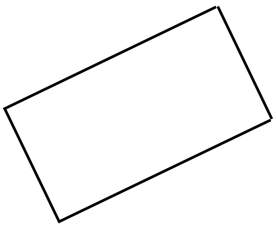
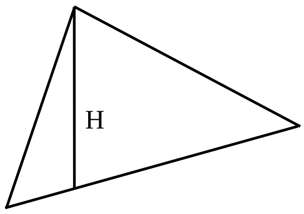
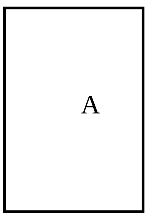
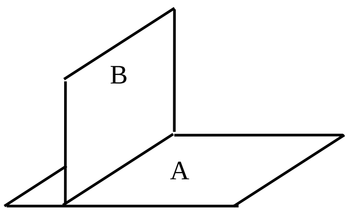
Dann wurden Schülergruppen auf dem nachfolgend abgedruckten Arbeitsblatt geometrischen Zeichnungen präsentiert; sie sollten entscheiden, ob die zugehörigen Beschreibungssätze „mathematisch richtig“ sind. Anschließend gab der Lehrer die richtigen Entscheidungen bekannt, begründete diese und erklärte in einer Darbietung anhand von Zeichnung und konkreten Modellen folgende Merkmale der mathematischen Bedeutung des Wortes *senkrecht*:

– Es kann auf gerade Linien (Geraden, Halbgeraden oder Strecken) sowie auf (ebene) <u>Flächen</u> angewendet werden.
– Es wird immer auf zwei Linien oder Flächen angewendet: g ist senkrecht zu h oder A ist senkrecht zu B.
– Die beiden Linien oder Flächen müssen miteinander einen rechten Winkel bilden (die Beziehung zum Blattrand spielt keine Rolle).

In einem anschließend in Einzelarbeit zu produzierenden Text sollten die Schüler unter Zuhilfenahme von Zeichnungen die mathematische Bedeutung von *senkrecht* erklären. Der Lehrer kontrollierte die Hefteinträge und veranlasste, wo nötig, Verbesserungen.

Nach Klärung der fachlichen Bedeutung wurden in einem Klassengespräch die eingangs gesammelten Sätze daraufhin untersucht, in welcher Bedeutung dort das Wort *senkrecht* jeweils gebraucht wurde, und inwieweit diese mit der mathematischen Definition übereinstimmt. (Der Klärung dienten auch kleine Tafelskizzen der jeweils beschriebenen Situationen.) In einer zusammenfassenden Erläuterung stellte der Lehrer, unter Bezugnahme auf die Beispiele, klar:

– Im Alltag wird das Wort *senkrecht* angewendet auf „gedachte Linien“, die auch von einem länglichen Gegenstand dargestellt werden können, sowie auf Flächen; es wird aber auch, im übertragenen Sinn, auf Menschen angewendet. (Das Wort *Senkrechtstarter* stellt eine Analogie zu einem Flugzeugtyp her.)
– Oftmals wird das Wort (als Eigenschaft) auf einzelne Linien oder Flächen angewendet; als zweite Linie oder Fläche wird aber dann zumeist die Bodenfläche mitgedacht. *Senkrecht* ist dann gleichbedeutend mit *lotrecht*.
– Der Winkel, den die Linie oder die Fläche mit dem Boden einschließt muss nicht genau ein rechter sein; oft genügt es, dass er sich dem rechten annähert.
– Mit diesen Merkmalen sollten die Schüler in einem abschließenden Klassengespräch die Kennzeichen des mathematischen Bedeutungsverständnisses noch einmal vergleichen.

 g und h sind zueinander senkrecht.	 g steht senkrecht auf h.
 k ist senkrecht.	 m ist senkrecht
 Im Rechteck stehen die Seiten aufeinander senkrecht.	 In diesem Dreieck ist die Höhe h senkrecht zur Grundseite.
 Die Fläche A steht senkrecht.	 Die Flächen A und B stehen senkrecht aufeinander.

b) „Übersetzen" von verbaler Sprache in mathematische Symbolsprache und umgekehrt

Eine Form für die hier gemeinten Aktivitäten stellt das Übersetzen von (symbolisierten) algebraischen Termen und Gleichungen in Verbalsprache und umgekehrt dar, wobei es jeweils verschiedene Formen der Verbalisierung gibt. Beispiele:

$4{,}5 \cdot x - (x + 1{,}2)$	Eine Zahl wird mit 4,5 multipliziert und davon wird die um 1,2 vergrößerte Zahl abgezogen. Oder: Bilde die Differenz aus dem 4,5fachen einer Zahl und der Summe aus dieser Zahl und 1,2! Oder: ...
$2(3x - 4) = 2 + 2x$	Das Doppelte der Differenz aus dem Dreifachen einer Zahl und 4 ist genauso groß wie die Summe aus 2 und dem Zweifachen der Zahl.

Wesentlich anspruchsvoller sind ‘Übersetzungen’ von der Art, wie sie bei COHORS-FRESENBORG u. a. (1992[4]) in folgendem fiktiven Text verlangt werden:

„Vor kurzem wurden in der arabischen Wüste, nicht weit von der Oase El-Kaian einige mächtige Steinquader vom ewig wandernden Wüstensand freigegeben." ... „Unter anderem fand [der deutsche Archäologe] Friedrich Sand die Überreste einer alten Papyrusrolle mit stark verblichen Schriftzeichen. Er erkannte sofort, dass es sich dabei um die Schrift der alten Maskonen handelte. Diese hatte man gerade ein Jahr zuvor anhand zahlreicher früherer Funde weitgehend entschlüsseln können. Trotzdem hatte Friedrich Sand beim Übersetzen Schwierigkeiten, da sich auf dem Schriftstück einige Zeichen befanden, die man noch nie gesehen hatte.

I. $\underset{Bb_1}{\vee}\ \underset{Bb_2}{\vee} \neg b1 = b2$

II. $\underset{Bb_1}{\wedge}\ \underset{Bb_2}{\wedge} \left(\neg b_1 = b_2 \rightarrow \underset{Kk}{\vee}(Db_1k \wedge Db_2k)\right)$

III. $\underset{Kk}{\wedge}\ \underset{Bb}{\vee} \neg Dbk$

Hier ist sein Versuch einer Übersetzung der ersten beiden Sätze:

I. Es gibt ein Bre b_1, es gibt ein Bre b_2, so dass gilt: b_1 ist verschieden von b_2.

II. Für alle Bres b_1, für alle Bres b_2 gilt: Wenn b_1 verschieden von b_2 ist, dann gibt es ein Ket k, so dass gilt: b_1 detiert k, und b_2 detiert k.

Aufgabe 1.1: Übersetze Satz III

Aufgabe 1.2: a) Das ist unglaublich! Du hast den Satz III übersetzen können und weißt nicht, um was es geht. Erkläre, warum dies möglich war.

b) Wie kannst Du die Bedeutung der Sätze herausfinden?"

„Friedrich Sand entschließt sich, da er viel über die Sitten und Gebräuche der Maskonen wußte, den Variablen in den Wüstensandsätzen folgende Bedeutung zu geben:

Bb: b ist Musiker

Kk: k ist ein Instrument

Dbk: b spielt k

Aufgabe 1.3: Schreibe die Wüstensätze für die Orchesterinterpretation ausführlich auf.

Friedrich Sand hat die Zeichen B, K, und durch Eigenschaften übersetzt:

Bb: Musiker sein

Kk: Instrument sein

Dbk: spielen"

...

Friedrich Sands Mitarbeiter Wilhelm Sturm war sich sicher, jetzt endlich zu wissen, wie die Tempelorchester der Maskonen zusammengesetzt waren. Abends in seinem Zelt erstellt er folgenden Plan:

Ali	Aladin	Assuman	Achmed
Harfe		Horn	Harfe
Flöte	Harfe	Trommel	Flöte
Pauke	Rassel	Pauke	Horn

Wir wollen überprüfen, ob die Wüstensandsätze für das von ihm konstruierte Orchester gelten.

Wir sehen sofort, dass Satz I erfüllt ist. Bei der Überprüfung des Satzes II haben wir mehr zu tun. Beginnen wir mit der Überprüfung:

Der Musiker Aladin und der Musiker Ali spielen beide das Instrument Harfe. Der Musiker Ali und der Musiker Assuman spielen beide das Instrument Pauke.
Die Überprüfung kannst du auch in Form einer Tabelle durchführen:

m_1	m_2	i
Aladin	Ali	Harfe
Ali	Assuman	Pauke

Aufgabe 1.6: Führe die Überprüfung zu Ende.

Aufgabe 1.7: Marion: „Muss man bei der Überprüfung von Satz II auch Zeilen wie
„Ali Ali“
notieren? Dann weiß ich aber nicht, was ich unter i eintragen soll.“
Beantworte Marions Frage.

Aufgabe 1.8: Überprüfe, ob Satz III erfüllt ist.

Du hast sicherlich auch herausgefunden, dass für das von Wilhelm Sturm aufgestellte Orchester Satz II nicht erfüllt ist.

Aufgabe 1.9: Ergänze den von Wilhelm Sturm erstellten Plan passend.

Wilhelm Sturm hat seinen Plan wie folgt ergänzt:

Ali	Aladin	Assuman	Achmed
Harfe	Trommel	Horn	Harfe
Flöte	Harfe	Trommel	Flöte
Pauke	Rassel	Pauke	Horn

Wilhelm Sturm ist hoch erfreut, dass er nun eine Orchesterzusammensetzung gefunden hat, die es bei den Maskonen gegeben haben kann. Friedrich Sand zweifelt dieses an. Er hat ein weiteres Problem. Er hat sich über Nacht noch einmal das Original angesehen. Es ist ihm dabei aufgefallen, dass er anfangs im zweiten Satz ein Zeichen nicht richtig gelesen hat. Der zweite Satz lautet wie folgt:

II. $\underset{Bb_1}{\wedge}\ \underset{Bb_2}{\wedge} \left(\neg b_1 = b_2 \rightarrow \overset{=1}{\underset{Kk}{\vee}} (Db_1 k \wedge Db_2 k) \right)$

Aufgabe 1.10: Was hatte er übersehen?

Übersetzt lautet Satz II wie folgt:

II Für alle Bres b_1 , für alle Bres b_2 gilt: Wenn b_1 verschieden von b_2 ist, dann gibt es genau ein Ket k, so dass gilt: b_1 detiert k und b_2 detiert k.

Wilhelm Sturm ist enttäuscht, denn nun stimmt seine Übersetzung nicht mehr.

Aufgabe 1.11:

Überprüfe, ob Wilhelm Sturms Orchesterzusammenstellung auch den ergänzten Satz II erfüllt.

Ändere den Plan so ab, dass die Orchesterzusammensetzung die Wüstensandsätze erfüllt.

c) Nachdenken über die Logik von Satzstrukturen

WODE (1976) beschreibt für eine ganze Reihe von Bereichen und Beispielen, wie - auch in Verbindung mit dem Deutschunterricht - über die sprachliche Darstellung mathematischer Sachverhalte bzw. über Merkmale der Fachsprache reflektiert werden sollte.

- Da sind z. B. Sätze mit mehrwertigen Satzkernen bzw., mathematisch ausgedrückt, mit mehrstelligen Relationen: *...leiht ihrer...ihr...* oder *...geteilt... = ...*
- Da sind zum zweiten grammatikalische Besonderheiten wie der Gebrauch des bestimmten und des unbestimmten Artikels*: Der Durchmesser eines Kreises beträgt 5 cm.* aber *Die Punkte A, B liegen auf einem Durchmesser des Kreises. - Die Kubikwurzel aus -27 ist -3.* oder *Eine Kubikwurzel aus -27 = -3.*
- Des Weiteren gibt es irreführende Simplifizierungen bei Schachtelfunktionen, wie z. B. *Der geometrische Ort aller Kreise, die durch P und Q gehen ist die Mittelsenkrechte von PQ* (anstelle von *Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise...*) oder *Die Anzahl der Kubikzahlen unterhalb Hundert ist kleiner als die Quadratzahlen unterhalb Zwanzig* (anstelle von .... *kleiner als die der Quadratzahlen unterhalb Zwanzig)*.

Schließlich erwähnt WODE Kommafehler und andere Mehrdeutigkeiten. Beispiel*: Es seien g und h zwei parallele Geraden und A, B $\in$ g und C, D $\in$ h vier Punkte, so dass ABCD ein Trapez ist.* bzw. ... *vier Punkte so, dass ABCD ein Trapez ist.*

Auf höherer Schulstufe können die Schüler in einer eigenen Unterrichtseinheit fachliche Sätze aussagenlogisch analysieren. Beispiele:

- Gegeben ist der Satz A: *Wenn eine natürliche Zahl gerade ist, so ist auch ihr Quadrat gerade.* Welche der folgenden Sätze drücken logisch dasselbe aus wie Satz A?
  - ∗ Zu einer geraden natürlichen Zahl gehört eine gerade Quadratzahl.
  - ∗ Damit eine natürliche Zahl gerade ist, muss notwendig ihr Quadrat gerade sein.
  - ∗ Eine natürliche Zahl ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat gerade ist.
  - ∗ Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl nicht gerade, so ist die Zahl selbst nicht gerade.
  - ∗ Jede gerade natürliche Zahl hat ein gerades Quadrat.
  - ∗ Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade, so ist auch die Zahl selbst gerade.
- Welche der folgenden Sätze sind wahr bzw. zutreffend, wenn als Voraussetzung gilt, dass die Funktion f(x) an der Stelle x_0 stetig ist?
  - ∗ Wenn sich x wenig ändert, dann ändert sich f (x) wenig.
  - ∗ Man kann $|x - x_0|$ beliebig klein machen, deswegen wird aber $|f(x) - f(x_0)|$ nicht genügend klein.
  - ∗ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x gilt:
    $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
  - ∗ Es gibt bei x_0 Änderungen von x um weniger als ε, denen aber Änderungen von f (x) bei $f(x_0)$ um mindestens δ entsprechen.
  - ∗ So klein man $|x - x_0|$ auch wählt, stets gibt es eine bestimmte Schranke, die von $|f(x) - f(x_0)|$ nicht unterschritten wird.
  - ∗ Man kann einen beliebig kleinen positiven Wert ε vorgeben. Stets kann man dann dazu einen positiven Wert δ finden, so dass gilt: Wenn man die x-Werte um weniger als ε ändert, dann ändern sich die zugehörigen Funktionswerte f (x) um weniger als δ.

- *Wenn Satz A gilt, dann gilt auch Satz B*. Welche der folgenden Formulierungen ist in der Bedeutung äquivalent zu oben stehendem Satz (siehe SCHMIDT & WEISER, 1976, S. 153)?
  - ∗ A gilt nur dann, wenn B gilt.
  - ∗ Wenn A nicht gilt, dann auch nicht B.
  - ∗ Wenn A gilt, dann auch B.
  - ∗ Es ist nicht möglich, dass A gilt, B aber nicht.
  - ∗ A gilt nur dann, wenn B gilt.
  - ∗ Genau dann, wenn A gilt, gilt auch B.
  - ∗ Wenn B nicht gilt, dann gilt auch A nicht.

  Oder die Schüler beziehen alltagssprachliche auf fachsprachliche Logik, indem sie entsprechende „Übersetzungsübungen“ durchführen. Beispiele:
- In der gewöhnlichen Sprache kommen die Quantoren "es gibt mindestens ein" und "für alle" meist versteckt in Pronomina wie den folgenden vor: *jemand, niemand, manchmal, immer, stellenweise, überall, sämtliche, irgendeiner, beliebig, jeder, man muss, man braucht nicht, etwas, ein, nichts, nie, irgendwann, stets*, ... Prüfe, welcher Quantor jeweils enthalten ist.
  (siehe FREUDENTHAL, 1973, S. 588).
- Welche Quantoren verbergen sich jeweils in den folgenden Ausdrücken?
  - ∗ Was lange währt, wird gut ...
  - ∗ Da kannst du lange warten, ehe ...
  - ∗ Das kann der stärkste Mann nicht behaupten.
  - ∗ Dessen kann der älteste Mann sich nicht erinnern.
  - ∗ Es war immer jemand hier.
  - ∗ Jemand war immer hier.

  (siehe FREUDENTHAL, 1973, S. 511)
- $G \in (x, t)$ bedeutet: im Augenblick t greife ich das Ding x.
  $S \in (x, t)$ bedeutet: im Augenblick t sehe ich das Ding x.
  $t < t'$ bedeutet: t ist früher als t'.
  Schreibe mit Hilfe dieser Symbole auf:
  - ∗ Ich sehe immer etwas.
  - ∗ Manchmal sehe ich nichts.
  - ∗ Jedes Ding sehe ich irgendwann.
  - ∗ Wenn ich etwas sehe, greife ich es sogleich.

  (siehe FREUDENTHAL, 1973, S. 592).
- x, y seien natürliche Zahlen. x T y soll bedeuten: x ist Teiler von y. $\forall$ x soll bedeuten: für alle x. $\exists$ x soll bedeuten: es gibt wenigstens ein x. Formuliere in gewöhnlicher Sprache und stelle den Wahrheitswert fest:
  $\forall x\ \forall y\ \ xTy$ $\quad \forall y\ \exists x\ \ xTy$ $\quad \forall x\ \exists y\ \ xTy$ $\qquad \exists y\ \forall x\ \ xTy$
- Formuliere in der Fachsprache (benutze dabei Variablen und Quantoren):
  - ∗ Wenn man irgendeine natürliche Zahl genügend oft zu sich selber addiert, dann wird die Summe größer als jede beliebig vorgegebene natürliche Zahl. Auf der Zahlengeraden liegen zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen stets noch weitere rationale Zahlen.
  - ∗ Die Gleichung $a + x = b$ ist im Bereich der rationalen Zahlen stets lösbar.

Das Negieren von Sätzen bzw. der Umgang mit negierten Aussagen stellt nicht nur für Schüler, sondern vielfach auch für Erwachsene ein Problem dar. Daher empfiehlt MATHEWSON (1984) gesonderte Übungen zu diesem Thema. Die Schüler sollten lernen, verneinte Sätze zu verstehen und selbst Sätze zu verneinen. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Sätzen mit einstelligen und solchen mit zweistelligen Prädikaten (*Fred ist größer als Mark.*), der Verneinung von Existenz- und Allaussagen (*Zu zwei Bruchzahlen gibt es stets eine, die zwischen diesen beiden liegt.* bzw. *Alle Zahlen, die durch zwei und drei teilbar sind, sind auch durch sechs teilbar.*) sowie Bedingungssätzen (z. B. *Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind die Basiswinkel gleich groß.*) Nicht zuletzt erscheint die Frage interessant, was sich aus verneinten Bedingungssätzen schließen lässt.

Literatur

AEBLI, H. (1981): *Denken: Das Ordnen des Tuns*; Bd. 2. Stuttgart: Klett

ASHLOCK, R.B. (1987): Use of Informal Language when Introducing Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 9 (3), 31 - 36

AUSTIN, J.L. & HOWSON, A.G.(1979): Language and Mathematical Education. *Educ. Studies Math*. 10, 161 - 197

BALACHEFF, N. & LABORDE, C. (1985): Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique: une approche sociocognitive. In MUGNY, G. (Hrsg.): *Psychologie sociale du développement*. Bern: Huber, 202 - 223

BALK, G.D. (1971): Application of Heuristic Methods to the Study of Mathematics at School. *Educational Studies in Mathematics* 3

BARNES, D. & TODD, F. (1977): *Communication and learning in small groups*. London: Routledge & Kegan Ltd.

BARNSLEY, M. (1988): *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc.

BARTOLINI-BUSSI, M. G. (1992): *Verbal Interaction and Mathematical Knowledge. Methodologies for Transcript Analysis*. Unveröffentl. Paper presented at ICME 7 in Quebec

BARUK, S. (1989): *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser

BAUER, L. (1978): *Mathematische Fähigkeiten in Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben*. Paderborn: Schöningh

BAUER, L. (1988): *Mathematik und Subjekt*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag

BAUERSFELD, H. (1972): Einige Bemerkungen zum Frankfurter Projekt. In Arbeitskreis Grundschule (Hrsg.): *Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule*. Frankfurt

BAUERSFELD, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In BAUERSFELD, H. (Hrsg.): *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel, 158 - 170

BAUERSFELD, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In BAUERSFELD, H. u. a. (Hrsg.): *Lernen und Lehren von Mathematik*. Köln: Aulis, 1 - 56

BAUERSFELD, H. (1988): Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In GROWS, D. A. & COONEY, T. J. & JONES, D. (Hrsg.): *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, Bd. 1. Hilldale, Ni: Erlbaum, 27 - 46

BAUERSFELD, H. (1995): „Language Games“ in the Mathematics Classroom: Their Function and Their Effects. In COBB, P & BAUERSFELD, H. (Hrsg.): *Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum

BAUMERT, J. & LEHMANN, R. (1997): *TIMMS - Mathematisch-naturwissen-schaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde*. Opladen: Leske & Budrich

BECHERVAISE, N. (1992): Mathematics: a foreign language? *The Australian Mathematics Teacher* 48 (2), 4 - 8

BELL, A. W. (1980): *The Nature of Mathematical Learning. Some Comparisons with Langugage*. Univ. of Leeds

BELL, A. & FISCHBEIN, E.& GREER B. (1984): Choice of operation in verbal arithmetic problems. The effect of number, size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics* 15, 123 - 147

BELL, G. & HEE-CHAN (1996): Why do we call a spade a spade? *Australian Math. Teacher* 52 (2), 8 - 12

BENNET, N. (1976): *Teaching style and pupil progress*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press

BELLACK, A. u. a. (1974): *Die Sprache im Klassenzimmer*. Düsseldorf: Schwann

BICKERTON, D. 1981: *Roots of Language.* Ann Arbor: Karoma Publishers

BICKMORE-BRAND, J. (1990): Implications from recent research in language arts for mathematical teaching. In BICKMORE-BRAND, J. (HRSG.): *Language in Mathematics*. Australian Reading Association, 1 - 9

BIGELOW, J. (1990): A linguistic overview. In DAVIS, G. & HUNTING, R. P. (Hrsg.): *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics.* Institute of Mathematics Education. La Trobe University, 1 - 6

BISHOP, A. J. (1991): *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht [u.a.]: Kluwer

BOLINGER, D. & SEARS, D.A.(1981): *Aspects of language.* Harcourt Brace Jovanovich Inc.

BORASI, R. & SIEGEL, M. (1994): Reading, writing and mathematics: rethinking the „basics“ and their relationship. In *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematics Education*. Saint-Foy: Laval Univ. Press, 35 - 48

BORNELEIT, P. (1991): Zusammenhängendes sprachliches Darstellen im Mathematikunterricht. In *Math. in der Schule* 29, 92 - 102

BOSCHET, F. (1987): Fonctions du code symbolique dans le discours mathématique. *Educational Studies in Mathematics* 18, 19 - 34

BOUCHARD, R. (1982*): L'étude des échanges verbaux en classe de mathématiques*. Unveröffentliches Manuskript

BOURKE, S. (1984): Insights into the teaching of mathematics in primary schols. *Victorian Institute of Educational Research Bulletin* 52, 6 - 18

BRAINERD, C.J. Hrsg. (1982): *Children's Logical and Mathematical Cognition.* Berlin.Heidelberg.New York: Springer Verlag

BRISSENDEN, T. H. F. (1980): *Mathematics Teaching. Theory and Practice*. London: Harper & Row

BRISSENDEN, T. H. F. (1988): *Talking About Mathematics*. Oxford: Blackwell

BRUNER, J.B. (1971): *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett

BÜHLER, H., u.a. (1965): *Sprachtheorie - Die Darstellungsfunktion der Sprache*. Stuttgart: Fischer

CAZDEN, C. B. (1986): Classroom Discourse. In WITTROCK, M. C.: *Handbook of Research on Teaching. Third Edition*. New York: Macmillan, 432 - 463

CAREY, J.E. und GOSS, A.E. (1957): The role of mediating verbal responses in the conceptual sorting behavior of children. *Journal of Genetic Psychology* 90, 69 - 74

CHANG, R. & SCROGIN CHANG, M. (1978): *Speaking of Chinese*. New York/ London: W. W. Norton & Co.

CHOMSKY N. (1981): *Lectures on Government and Binding*. Dordrecht: Foris Publications

CHRISTIANSEN, B. & WILSON, B.J. (1974): Mathematics education in the context of the symposium. In *Nairobi Report. Interactions between Linguistics and Mathematical Education.* Final Report of the Symposium sponsored by UNESCO, CEDO, and ICMI. Nairobi, Kenya, September 1 - 11, 1974. UNESCO: ED-74/CONF, 808, 14 - 24

CICOUREL, A. V. u. a. (1974): *Language use and school performance*. New York: Academic Press

CIVIL, M. (1992): *Preservice Teachers Communicating Mathematics*. Paper presented at ICME 7 in Quebec.

CLEMENTS, M.A. & DEL CAMPO, G. (1989): Linking Verbal Knowledge, Visual Images, and Episodes for Mathematical Learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition Vol. 11, 25 - 33

COCKCROFT, W. H. (Hrsg. 1982): *Mathematic Counts*. London: Her Majesty's Stationary Office

COCKING, R.R. & MESTRE, J.P. (1988): *Linguistic and Cultural Influences on Learning Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Ass.

COSERIU, E. (1988): *Einführung in die Allgemeine Sprachwissenschaft*. Tübingen: Francke

COHORS-FRESENBORG, E. u. a. (1992[4]*): Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen. Textbuch für Schüler zur Einführung in die axiomatische Auffassung von Mathematik*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik

DALE, T. C. & CUEVAS, G. J. (1987): Integrating Language and Mathematics Learning. OERI of US Dept. of Education (Hrsg.): *Language in Education: Theory and Practice 67*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 9 - 54

D'AMBROSIO, U. 1995: Etnomatematica: Teoria e pratica pedagogica (prima parte) = Ethnomathematics: theory and pedagogical practice (first part). *Educ.Mat. Anno* 16 ser.4 v.2 (Ottobre 1995), 147 - 159

D'AMBROSIO, U. 1996: Etnomatematica: Teoria e pratica pedagogica (seconda parte) = Ethnomathematics: theory and pedagogical practice (second part).
Educ.Mat. Anno 17 ser.5 v.1 (Febbraio 1996), 29 - 48

D'AMORE, B. (1996): Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematikdidaktik* 17 (2), 81 - 97

DAMEROW, P. & LEFÈVRE, W. Hrsg. (1981): *Rechenstein, Experiment, Sprache*. Stuttgart: Ernst Klett

DAVIDSON, D. M. & PEARCE, D. L. (1983): Using Writing Activities to Reinforce Mathematics Instruction. *Arithmetic Teacher* 35 (8), 42 - 45

DAVIS, G. & HUNTING, R. P. (Hrsg.1990): *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics.* Institute of Mathematics Education. La Trobe University

DEGENER, R. & KÜHL, J. (1984): Kopfgeometrie. *Math.-naturwiss. Unterricht* 37, 342-347

DEWEY, J. (1951): *Wie wir denken*. Zürich: Conzett & Huber

DIETZ, D. (1955): The facilitating effects of words on discrimination and generalization. *J. Experimental Psychology* 50, 255 - 260

DIN-TASCHENBUCH 202 (1994): *Formelzeichen, Formelsatz, Mathematische Zeichen und Begriffe*. Berlin.Wien.Zürich: Beuth-Verlag GmbH

DÖRFLER, W. (1984 a): Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In KAUTSCHITSCH, H. & METZTLER, W. (Hrsg.): *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun*. Stuttgart: Teubner

DÖRFLER , W. (1984 b): Verallgemeinerung als zentrale mathematische Fähigkeit. *Journal für Mathematikdidaktik* 5 (4), 239 - 264

DÖRFLER , W. (1988a): Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktionen. In DÖRFLER, W. (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*. Stuttgart: Teuber, 55 - 125

DÖRFLER , W. (1988b): Begriff als Tätigkeitsstruktur - Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff. In BENDER, P (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin: Cornelsen, 29 - 36

DORMOLEN, J. VAN (1978): *Didaktik der Mathematik*. Braunschweig: Vieweg

DORMOLEN, J. VAN (1986): Text analysis. In CHRISTIANSEN, B. & HAWSON, A. G. & OTTE, M. (Hrsg.): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel, 141 - 171

DUFFIN, J. (1986): Mathematics through classroom talk. *Mathematics in School* 15 (2), 10–13

DUNCKER, K. (1966): *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer

DURKIN, K. u. a. (1990): Spatial vocabulary in elementary mathematics: childrens responses to potential semantic conflicts. *Education, Research and Perspectives* 17 (1), 50–65

DUVAL, R. (1994): Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères* 17, 121 - 138

ECO, U. (1994): *Die Suche nach der vollkommenen Sprache.* München: C.H. Beck

EDGAR, G. A. (1990): *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York/Berlin: Springer

ELLERTON, N.F. & CLEMENTS, M.A. (1991): *Mathematics in Language: A Review of Language Factors in Mathematics Learning.* Victoria, Australien: Deakin University

ELLROTH, D. & SCHINDLER, M. (1975): *Die Reform des Mathematikunterrichts*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt

EUKLEIDES: *Euclidis Elementa*. Vol I Libri I - IV cum appendicibus. Post I.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis. Leipzig: Teubner 1969

FELLER, G. (1983): *Diagnose und Analyse von Mathematikleistungen in der Primarstufe.* Frankfurt/Main: Lang

FISHER, S.E.; VARGA-KHADEM, F.; WATKINS, K.E.; MONACO, A.P. & PEMBREY, M.E. (1998): Localisation of a gene implicated in a severe speech and language disorder. *Nature Genetics* 18, 168 - 170

FISCHER, R. (1986): Zum Verhältnis von Mathematik und Kommunikation. *mathematica didactica* 9, 119 - 131

FLORENSKI, P. (1993): *Denken und Sprache.* Berlin: EditionKONTEXT

FLYNN, S.(1988): Second language acquisition and grammatical theory. In NEWMEYER, F. J. (Hrsg.): *Linguistics: The Cambridge Survey*. Vol II *Linguistic Theory: Extensions and Implications*. Cambridge University Press, 53 - 73

FLUCK, H. - R. (1985): *Fachsprachen*. Tübingen: Francke

FRAUNHOLZ, W. & MAIER, H. & TROMMSDORFF, F. (1986): Video-Aufzeichnungen von explorativen Gesprächen als Instrument unterrichtsbezogener didaktischer Forschung. *mathematica didactica* 9, 193 - 212

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett

FROMKIN, V. & RODMAN, R. (1981): *An Introduction to Language.* New York/Tokyo: Holt; Rinehart and Winston

FRÜH, W. (1980): *Lesen, Verstehen, Urteilen*. München: Alber

FUSON, K.C. & RICHARDS, J. & BRIARS, D.J. (1982): The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. In BRAINERD, C.J. Hrsg. (1982) *Children's Logical and Mathematical Cognition.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 33 - 92

GAGNÉ, R.M. & SMITH, E.C. (1962): A Study of the Effects of Verbalisation on Problem Solving. *Journal of Experimental Psychology* 63 (1), 12 - 18

GALILEI, G. (1623): *Il saggiatore.* In Opere di Galileo Galilei a cura di Franz Brunetti. Volume Primo. Torino: Unione Tipografico - Editrice Torinese 1964

GALLIN, P. & RUF, U. (1993): Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Didaktik der Mathematik* 14 (1), 3 - 33

GALLO, E. (1985): Geometria, Percezione, Linguaggio. *L'Educazione Matematica* 6 (1), 61–103

GALPERIN, P.J. & TALISINA, N.F. (1974^2): Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler. In GALPERIN, P.J. & LEONJEW, A.N. (1972): *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk und Wissen

GAWNED, S. (1990): An emerging model of the language of mathematics. In BICKMORE-BRAND, J. (Hrsg.): *Language in Mathematics*. Australian Reading Association, 27 - 58

GERDES, P. (1990): *Ethnogeometrie. Kulturanthropologische Beiträge zur Genese und Didaktik der Geometrie*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

GERICKE, H. (1970): *Geschichte des Zahlbegriffs*. Mannheim : B. I. Hochschultaschenbücher 172/172a*

GLASERSFELD, E. v. (1987): *Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus*. Braunschweig: Vieweg

GNERRE, M. (1983): Native language vs. second language in teaching elementary mathematics: A case from the Amazon. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 582 - 583

GOOD, T. L. & SLAVINGS, R. L. (1988): Male and Female Student Question-Asking Behavior in Elementary and Secondary Mathematics and Language Classes. *Journal of Research in Childhood Education* 3 (1), 5 - 23

GREENBERG, J. H. (1978): Generalizations about numeral systems. In *Universals of Human Language* (ed. by J. H. Greenberg) Vol.3 Stanford University Press, 249 - 295

GREWENDORF, G. & HAMM, F.& STERNEFELD, W. (1991): *Sprachliches Wissen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp

GRIESEL, H. (1978): Zu den unterschiedlichen Arten von Termini und ihrer Verwendung im Mathematikunterricht. In *Schriftenreihe IDM* 18, 160 - 170

GROEBEN, N. (1982): *Textverständnis - Textverständlichkeit*. Münster

GUILLEREAUT, M & LABORDE, C. (1981): Über die Art der Bezeichnung mathematischer Objekte in der Sprache der Schüler. *Journal für Mathematikdidaktik* 2 (3), 225 - 248

HAARMANN, H. (1991): *Universalgeschichte der Schrift*. Frankfurt/New York: Campus

HADAMARD, J. (1954): *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications

HAILE, A. (1994): Uno studio sul ruolo del linguaggio nel processo di insegnamento e apprendimento della matematica (= A study on the role of language on the process of teaching and learning mathematics). *L'Educazione matematica* Anno 15 ser.4 v.1,21–35

HALLIDAY, M.A.K. (1974): Some aspects of sociolinguistics. In *Nairobi Report. Interactions between Linguistics and Mathematical Education.* Final Report of the Symposium sponsored by UNESCO, CEDO, and ICMI. Nairobi/Kenya/September 1 - 11 UNESCO: ED - 74/CONF, 808

HALLIDAY, M.A.K. (1978): *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning.* London: Edward Arnold

HANNA, G. (1997): The Ongoing Value of Proof. *Journal für Mathematikdidadiktik* 18 (2/3), 171 - 185

HARGRAVE, S. (1982): *Language and Culture;* Work Papers of SIL-AAB Series B Vol.8. Darwin: Summer Institute of Linguistics

HARRIS, P. (1991): *Mathematics in a Cultural Context: Aboriginal Perspectives of Space, Time, and Money.* Geelong, Victoria: Deakin University

HARRIS, J. (1982): Facts and Fallacies about Aboriginal Number Systems. In HARGRAVE, S. (Hrsg.): *Language and Culture*. Work Papers of SIL - AAB Series B Vol 8

HEISENBERG, W. (1955): *Das Naturbild der heutigen Physik.* Rowohlt

HENNES, C. & SCHMIDT, N. (1982): Logisches Schließen bei Hauptschülern gegen Ende ihrer Schulzeit. *Journal für Mathematikdidaktik* 3 (2), 145 - 171

HENTSCHEL, E. & WEYDT, H. (1994): *Handbuch der deutschen Grammatik.* Berlin/New York: de Gruyter

HERSH, R. (1995): Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics. *Amer. Math. Monthly* 102, 589 - 593

HEYMANN, H. W. (1982): Didaktisches Handeln im Mathematikunterricht aus Lehrersicht. In BAUERSFELD, H. u.a.: Analysen zum Unterrichtshandeln. Köln: Aulis, 141 - 167

HIEBSCH, H. (Hrsg: 1969): *Ergebnisse der sowjetischen Psychologie*. Stuttgart: Klett

HOEMANN, H.W. & ROSS, B.M. (1982): Children's Concepts of Chance and Probability. In BRAINERD, C.J. (Hrsg.): *Children's Logical and Mathematical Cognition.* Berlin.Heidelberg.New York: Springer, 93 - 122

HOPF, D. (1980): *Mathematikunterricht. Eine empirische Untersuchung zur Didaktik der Unterrichtsmethode in der 7. Klasse des Gymnasiums*. Stuttgart: Klett-Cotta

HOSOI, T. (1983): On students' misinterpretation of logical expressions influenced by foreign language learning. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 580 - 581

HOWSON, A.G. (1983): Language and the teaching of mathematics. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 568–573

HOYLES, C. (1985): What is the point of group discussion in mathematics? *Educational Studies in mathematics* 16, 205 - 214

HULL, R. (1985): *The language gap. How classroom dialogue fails*. London/New York: Methuen

IRISH, E.H. (1964): Improving Problem Solving by Improving Verbal Generalizations. *Arithmetic Teacher* 11 (3), 169 - 175

ISSING. L. & ULLRICH, B. (1969): Einfluß eines Verbalisierungstrainings auf die Denkleistung von Kindern. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie* 1, 32 - 40

JAHNKE, N. (1995): Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer eflten Klasse. *Mathematica didactica* 18 (2),30–58

JAHNKE, N. (1996): Mathematikgeschichte für Lehrer – Gründe und Beispiele. *Mathematische Semesterberichte* 43, 21 - 46

JAMES, N. & MASON, J. (1982): Towards Recording. *Visible Language* 16 (3), 249 - 258

JANVIER, C. (1987): Translation Processes in Mathematics Education. In JANVIER, C. (Hrsg.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 27 - 32

JERMAN, M.E. & SAWFORD, M. (1974): Linguistic and Computational Variables in Problem Solving in Elementary Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 5, 317–362

JOHNSON, H.C. (1967): The Effect of Instruction in Mathematical Vocabulary upon Problem Solving in Arithmetic. *J. of Educational Research* 38, 97–110

JOSEPH, G.Gh. (1992): *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics.* Penguin Books

JUNGNICKEL, D. (1995): *Codierungstheorie*. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag

JUNGWIRTH, H. (1989): *Projekt „Die geschlechtliche Dimension der Interaktion im Mathematikunterricht und ihre Folgen"*; Endbericht. Linz

JUNGWIRTH, H. (1991): Die Dimension 'Geschlecht' in den Interaktionen des Mathematikunterrichts. *Journal für Mathematikdidaktik* 12 (2/3),133 - 166

KAINZ, F. (1964): Das Denken und die Sprache. In BERGIUS, R. (Hrsg.): *Handbuch der Psychologie, Bd. 2*. Göttingen: Hogrefe, 566 - 614

KAISER, H. & NÖBAUER, W. 1984: *Geschichte der Mathematik*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

KANE, R. B. u. a. (1974): *Helping Children to Read Mathematics*. New York: American Book

KANE, T. (1992): *Funneling or Focusing of Interaction in Mathematics Discussion*. Paper presented at ICME 7 in Quebec

KASPER, H. & LIPOWSKY, F. (1997): Das Lerntagebuch als schülerbezogene Evaluationsform in einem aktiv-entdeckenden Grundschulunterricht - Beispiel aus einem Geometrie-Projekt. In SCHÖNBECK, J. (Hrsg.): *Facetten der Mathematikdidaktik.* Weinheim: Dt. Studienverlag, 83 - 103

KAUER, H. A. (1985): Filmstreifen als Konstruktionsvorlage. *mathematik lehren* 9, 31 - 37

KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W. Hrsg (1984): *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun*. Stuttgart: Teubner

KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W., Hrsg. (1985): *Anschauung und mathematische Modelle*. Stuttgart: Teubner

KAUTSCHITSCH, H. & METZLER, W., Hrsg. (1989): *Anschauliches Beweisen*. Stuttgart: Teubner

KEMME, S. L. (1981): References of speech acts as characteristics of mathematical classroom conversation. *Educational Studies in Mathematics* 12, 43 - 58

KLAUSMEIER, H.J. & RIPPLE, R.E. (1975): *Moderne Unterrichtspsychologie*. München: Reinhardt

KLAUSMEIER, H.J. & GHATALA, E. & FRAYER, D. (1974): *Conceptual learning and development. A cognitive view*. New York: Academic Press

KLEIN, F. (1968): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*. Berlin, Göttingen, Heidelberg. Band 1: Springer

KLIX, F. (1971): *Information und Verhalten. Kybernetische Aspekte der organisierten Informationsverarbeitung. Einführung in naturwissenschaftliche Grundlagen der allgemeinen Psychologie*. Bern: Huber

KLIX, F. (1995): Stabilität und Wandlungen in geistigen Dispositionen des Menschen. *Sitzungsberichte der Leibniz - Sozietät* 2 (1/2), 5 - 40

KRAINER, K. (1990): *Lebendige Geometrie.* Europäische Hochschulschriften. Frankfurt am Main: Lang GmbH

KRUMMHEUER, G. (1982): Rahmenanalyse zum Unterricht einer achten Klasse über „Termumformungen". In BAUERSFELD, H. u. a.*: Analysen zum Unterrichtshandeln*. Köln: Aulis, 41 - 103

KUBLER, J. (1984): Une étude sur la transmission orale d'informations en mathématiques. *petit x* 6, 55 - 76

KUCKENBURG, M. (1989): *Die Entstehung von Sprache und Schrift.* Köln: Du Mont

KÜNZLER, F. (1985): Arbeitsgänge an einem Körper zeichnerisch darstellen und sprachlich formulieren. *mathematik lehren* 9, 42 - 45

LABORDE, C. (1982): *Langue Naturelle et Ecriture Symbolique*. Thèse d'état, Université de Grenoble

LABORDE, C. (1983): Relations entre le développement du langage et celui des concepts mathématiques chez les enfants. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 578 - 580

LABORDE, C. (1990): *The role of language in the teaching and learning of mathematics.* Proc. BISME - 2, Bratislava, 22 - 36

LABORDE, C. (1991): Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans): une expérimentation. In *petit x* 28, 57 - 90

LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1980): *Metaphors We Live By.* The University of Chicago Press. Chicago and London

LANGACKER, R.W. (1973^2): *Language and its structure.* Harcourt Brace Jovanovich,Inc.

LAWLER, R. L. (1981): The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science* 5, 1 - 30

LENNÉ, H. (1969): *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Klett

LENNEBERG, E. (1967): *Biological Foundations of Language*. New York: Wiley

LERCH, H.-J. (1991): *Strukturen der Wissensrepräsentation: Empirische Analysen von Informationsverarbeitungsprozessen beim Verstehen von Texten*. Regensburg: Roderer

LEROI-GOURHAN, A. (1980): *Hand und Wort - Die Evolution von Technik, Sprache und Kunst*. Frankfurt: Suhrkamp

LEWIS, M.M. (1970): *Sprache, Denken und Persönlichkeit im Kindesalter*. Düsseldorf: Schwann

LÖRCHER, G. A. (1976): Mathematik als Fremdsprache. *Reflektierte Unterrichtspraxis* 10 (1), 1 - 11

LORENZ, J. - H. (1992): *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe

LOVELL, K. (1964): *The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children*. London: Univ. of London Press

LOWENTHAL, F.D. (1983): Development of language and mathematical concepts in children: Is there a relationship? In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 573 - 575

LUKESCH, H. & KISCHKEL, K.-H. (1987): Unterrichtsformen an Gymnasien. Ergebnisse einer retrospektiven Verarbeitung von Lehrverfahren. *Zeitschrift f. erziehungswiss. Forschung* 21 (4),237 - 256

LURIJA, A. (1982): *Sprache und Bewußtsein*. Köln: Pahl - Rugenstein

MACGREGOR, M. (1990): Reading and writing in mathematics. In BICKMORE-BRAND, J. (Hrsg.): *Language in Mathematics*. Australian Reading Association Inc., 100–108

MACGREGOR, M.(1992): *How students interpret equations: intuition versus taught procedures*. Unpublished Paper, presented at ICME7 in Quebec.

MAIER, H. (1977): *Kompendium Didaktik - Mathematik*. München: Ehrenwirth

MAIER, H.(1986): Empirische Arbeiten zum Problemfeld Sprache im Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 18 (4), 137 - 147

MAIER, H. (1995): Abschlußbericht zum Forschungsprojekt *„Verstehen von Lehrerinstruktionen und -erklärungen durch Schüler im Mathematikunterricht (VIMU)“*. Regensburg

MAIER, H. & BAUER, L. (1978): Zum Problem der Fachsprache im Mathematikunterricht. In *Schriftenreihe IDM* 18, 137 - 159

MAIER, H. & STEINBRING, H. (1998): Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht - Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen. *Journal für Mathematikdidaktik*. Im Druck

MAIER, H. & VOIGT, J. (1989): Die entwickelnde Lehrerfrage im Mathematikunterricht. *mathematica didactica* 12 (1),23 - 55 und 12 (2/3),87 - 94

MALLE, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn

MANNING, M. & G. (1996): Writing in Math and Science. *Teaching K* 8, 107 - 110

MARTINET, A.(1970): *Éléments de linguistique générale.* Paris: Librairie Armand Colin

MATHEWSON, G. C. (1984): Teaching forms of negation. *The reading teacher* 37 (4), 354–358

MEHAN, H. (1979): *Learning Lessons*. Cambridge: Harvard University Press

MENNINGER, K. (1958): *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen.

MERZ, F. (1969): Der Einfluß des Verbalisierens auf die Leistung bei Intelligenzaufgaben. *Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie*, 1, 114 - 137

MERZYN, G. (1987): Die Sprache unserer Schulbücher. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 40 (2), 75 - 80

MESTRE, J. & GERACE W. (1986): The Interplay of Linguistic Factors in Mathematical Translation Tasks. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 8 (1), 59 - 72

MILLER, L.D. (1992): Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (4), 329 - 340

MÖLLER, R. (1994): Zum Verständnis von Aufforderungen beim Lösen von Algebraaufgaben. *Der Mathematikunterricht* 4, 43 - 58

MOLL, R.N. & ARBIB, M.A. & KFOURY, A.J. 1988): *An Introduction to Formal Language Theory.* Springer

MORGAN, C. (1996): *Written reports of mathematical problem solving: the construction of a discourse*. Unveröffentlichtes Manuskript

MORRIS, R.W. (1974): Linguistic problems encountered by contemporary curriculum development projects in mathematics. In *Nairobi Report. Interactions between Linguistics and Mathematical Education.* Final Report of the Symposium sponsored by UNESCO, CEDO, and ICMI. Nairobi, Kenya, September 1 - 11, 1974. U-NESCO: ED-74/CONF, 808, 25-58

MRAZCK, J. (1979): *Verständnis und Verständlichkeit von Lesetexten*. Frankfurt/M.: Lang

MUNRO, J. (1990): Mathematics and Language: A Subset of Language? In DAVIS, G. & HUNTING, R.P.: *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics.* Bundoora (Australien): La Trobe University, 7 - 24

NAIROBI-REPORT (1974): Interactions between Linguistics and Mathematical Education. Final Report of the Symposium sponsored by UNESCO, CEDO, and ICMI Nairobi/Kenya/September 1 - 11, UNESCO: ED - 74/CONF, 808

NEIDHARDT, H. & ZEITLER, W. (1994): *Fraktale und Chaos*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

NELSON, D. & JOSEPH, G.Gh. & WILLIAMS, J. (1993): *Multicultural Mathematics* Oxford/New York: Oxford University Press

NESHER, P. & TEUBAL, E. (1975): Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Sovling. *Educational Studies in Mathematics* 6, 41 - 51

NESHER, P. & GREENO, J.G. & RILEY, M.S. (1982): The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics* 13, 373 - 394

NETH, A. & VOIGT, J. (1991): Lebensweltliche Inszenierungen. Die Aushandlung schulmathematischer Bedeutungen an Sachhandlungen. In MAIER, H. & VOIGT, J. (Hrsg.): *Interpretative Unterrichtsforschung*. Köln: Aulis, 79 - 116

NEWMAN, A. (1983): *Language and Mathematics*. Sydney/Melbourne: Harcourt Brace Javonovich

NEYERET, R. (1991): Lecture d'énoncés et progression thématique. *Grand N* 50, 89 - 101

NOLL, R. S. (1983): *Effects of verbal cueing and a visual representation on percent problem-solving performance of remedial adults*. New York: Fordham University (Diss.)

OBERSCHELP, A. (1995): *Merkmale und Größen*. Vortrag auf der AEF-Mitarbeiterversammlung, Freudenstadt, 29.März 1995

OERTER, R. (1971): *Psychologie des Denkens*. Donauwörth: Auer

ORTON, A. (1987*): Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoria y práctica en el aula*. Madrid: Ediciones Morata, S.A.

OTTE, M. (1983): Texte und Mittel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 15 (4), 183–194

OTTE, M. (1986): What is a text? In CHRISTIANSEN, B. & HAWSON, A. G. & OTTE, M. (Hrsg.): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel, 173 - 203

PAIVIO, A.. (1986): *Mental Representations. A Dual Coding Approach*. Oxford: Oxford Univ. Press

PATRONIS, T. & SPANOS, D. & GAGATSIS, A. (1994): A notion of semantic distance between terms or expressions and its application in the case of mathematical terms used in the classroom. *Int. Journal of Mathematical Education, Science and Technology* 25 (1), 31 - 43

PAWLOW, J. P. (1954): *Sämtliche Werke*. Berlin: Akademie - Verlag

PELED, Z. & WITTROCK, M.C. (1990): Generated meaning in the comprehension of word problems in mathematics. *Instructional Science* 19, 171 - 205

PELLEREY, M. (1980): Analysis of reciprocal relationships between linguistic development and mathematics teaching: a psychological and socio-cultural point of view. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 576 - 578

PESCHEK, W. (1985): Veränderungen kognitiver Strukturen durch den Aufbau von Handlungsvorstellungen. In DÖRFLER W. & FISCHER, R.: *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik*. Stuttgart: Teubner, 125 - 246

PESCHEK, W. (1989): Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozeß. *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (3), 211 - 285

PETERS, W. (1993): Klassisches Veranschaulichungspostulat und ikonisch - geometrische Sprache. Aspekte der Visualisierungsdiskussion in der Mathematikdidaktik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* Nr. 3, 107 - 113

PHILLIPS, E. & CRESPO, S. (1996): Developing Written Communication in Mathematics Through Math Penpale Letters. *For the Learning of Mathematics* 16 (1) 15 - 22

PIAGET, J. (1972): *Sprechen und Denken des Kindes*. Düsseldorf: Schwann

PIRIE, S. (1991): Mathematical discussion: incoherent exchanges or shared understandings? *Language and Education* 5 (4), 273 - 286

PIRIE, S. & SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1988): Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics* 19 (4), 459 - 470

PIMM, D. (1987*): Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classroom*. London/New York: Routledge & Keagan Paul

PIMM, D. (1990): Certain metonymic aspects of mathematical discourse. In *Proceedings of the 14th PME Conference*, III, in Mexiko, 129 - 136

POINCARÉ, H. (1914): *Wissenschaft und Methode*. Leipzig: Teubner

POLYA, G. (1967[2]): *Schule des Denkens*. *Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: Francke

POWELL, A.B. & RAMNAUTH, M. (1992): Beyond Questions and Answers: Prompting Reflections and Deepening Understandings of Mathematics using Multiple-Entry Logs. *For the Learning of Mathematics* 12 (2), 12 - 18

Proceedings Fourth International Congress on Mathematical Education - ICME (1980). Herausgeg. von M. Zweng. Birkhäuser: Boston Basel Stuttgart

Proceedings Fifth International Congress on Mathematical Education - ICME (1984). Herausgeg. von M. Carss. Basel Boston Stuttgart 1986

Proceedings Sixth International Congress on Mathematical Education - ICME (1988). Herausgeg. von A. & K. Hirst. János Bolyai Mathematical Society Budapest 1988

Proceedings Seventh International Congress on Mathematical Education - ICME (1992). Herausgeg. von C. Gaulin & B. R. Hodgson & D. H. Wheeler & J. C. Egsgard. Sainte-Foy: Les Presses de l'Université Laval 1994

Proceedings of Seminar-cum-workshop on mathematical linguistics, mathematical language, and interaction with mathematical education. Jadavpur University, Calcutta 1984. Herausgeg. von D. K. Sinha. UNESCO, Paris 1984

PRUSINKIEWICZ, P. & HANAN, J. (1980): *Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants.* Lecture Notes in Biomathematics Vol. 79

RADATZ, H. (1986): Anschauung und Sachverstehen im Mathematikunterricht der Grundschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1986*. Hildesheim: Franzbecker, 239–242

RASOLOFONIAINA, I. (1983): *Conditions d'Apprentissage Mathématique par la Lecture*. Strasbourg: Institut de Recherche Mathématique Avancée (Diss.)

REICHEL, H.C. (1991): Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. In POSTEL, H. & KIRSCH, A. & BLUM, W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel*. Schroedel Schulbuchverlag, 156 - 169

REYNOLDS, J.H. (1968): Cognitive Transfer in Verbal Learning. *Journal for Educational Psychology* 59 (2), 133 - 138

RÉVÉZS, G. (1954): Denken und Sprechen. *Acta Psychologica*, Band X. Amsterdam: North Holland, 3 - 49

RICHARD, J. E. & ESCARABAJAL, J. C. (1983): Comprehension and solution processes in word problem solving. In HERSHKOWITZ, N. (Hrsg.): *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Israel: Rehovat, 130–135

RIEDER, K (1977): Sprechen und Denken beim gehörgeschädigten Kind. *Zeitschrift für Heilpädagogik* 3, 78 - 88

RIEHL, C. (1991): Gruppenarbeit und zusammenhängende sprachliche Darstellungen durch Schüler im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule* 29 (2/3), 114 - 122

ROBINS, R.H. & UHLENBECK, E.M. (Hrsg. 1991): *Endangered Languages*. Oxford/New York: Berg

ROBINSON, I. (1990): Mathematics and Language: The Experiences of EMIC and Key Group. In *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics.* Institute of Mathematics Education. La Trobe University, 84 - 99

ROEPER, TH.(1988): Grammatical principles of first language acquisition: theory and evidence. In NEWMEYER, F.J. (Hrsg.):. *Linguistics: The Cambridge Survey* Vol II *Linguistic Theory: Extensions and Implications.* Cambridge University Press, 35 - 52

ROMMETVEIT, R. (1985). Language aquisition as increasing linguistic structuring of experience and symbolic behavior control. In WERTSCH, J. V. (Hrsg.):: *Culture, communication, and cognition*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 183 - 205

ROTMAN, B. (1988): Towards a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72-1/2, 1 - 35

ROWLAND, T. (1995): Hedges in mathematics talk: linguistic pointers to uncertainty. *Educational Studies in Mathematics* 29 (4), 327 - 353

SCHIPPER, H. & HUELSHOFF, A. (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? - Zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. *Grundschule* 16 (4), 54 - 56

SCHMANDT-BESSERAT, D. (1992): *Before writing*. Vol I: *From counting to cuneiform.* Austin, Texas: University of Texas Press

SCHMIDT, S. & WEISER, W. (1976): *Zur Logikleistung von Studienanfänger im Zusammenhang mit gymnasialen Schultypen und Mathematikzensur*. Köln: Seminar für Didaktik der Mathematik in pädagogische Hochschule Rheinland

SCHNEITER, R. & ZIMMERMANN, P. (1985): Wie eine Definition im Deutsch- und im Mathematikunterricht erarbeitet werden kann. *mathematik lehren* 9, 46 - 50

SCHULZ, R.H. (1991): *Codierungstheorie: Eine Einführung*. Braunschweig: Vieweg

SCHWARZ, M. (1992): *Einführung in die Kognitive Linguistik*. Tübingen: Francke

SCHWEIGER, F. (1987): Zahlerzeugende Prozesse. Ein Betrag zum Thema Zahlwörter und Zählsysteme. *Mathematische Semesterberichte* 34 (1987), 1 - 20

SCHWEIGER, F. (1993a): "...geschrieben in mathematischer Sprache" *Wissenschaftliche Nachrichten* Nr.92 April 1993, 33 - 37

SCHWEIGER, F. (1993b): Mathematik ist eine Sprache. In BUSCHMANN, A. (Hrsg.): *Jahrbuch der Universität Salzburg* 1991 - 1993, 303 - 314

SCHWEIGER, F. (1996a): Zahlen und Zählen - Anmerkungen zur Bildung von Zahlwörtern. In MALLE, G. & REICHEL, H.CH. (Hrsg.): *Fragen zum Mathematikunterricht.* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky 1996, 19 - 27

SCHWEIGER, F. (1996b): Die Sprache der Mathematik aus linguistischer Sicht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1996* 44 - 51.

SCHWEIGER, F. (1997): Arithmetical processes for building up number words. *Moderne Sprachen* 41/1 (1997), 75 - 88

SCRIBA, C.J. (1968): *The concept of number*. Mannheim: B.I. Hochschulskripten 825/825a

SELTER, Ch. (1994): *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag

SENFTLEBEN, H.-G. (1996): Erkundungen zur Kopfgeometrie (unter besonderer Beachtung der Einbeziehung kopfgeometrischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der Grundschule). Journal für Mathematikdidaktik 17 (1) 49 - 72

SHIRLEY, L. (1989): *Counting in Nigerian Languages*. Manuscript presented at the International Congress of Mathematical Education in Budapest

SIEGEL, L.S. (1982): The Development of Quantity Concepts: Perceptual and Linguistic Factors. In BRAINERD, C.J. Hrsg. (1982): *Children's Logical and Mathematical Cognition.* Berlin.Heidelberg.New York: Springer Verlag, 123 - 155

SIMEONOV, E. (1996): Ansätze semiotischer Methoden und Betrachtungsweisen in der Mathematik. *European Journal for Semiotic Studies* Vol. 8 (2,3),413-466

SINGLETON, D.(1989): *Language Acquisition: The Age Factor.* Multilingual Matters Ltd.: Clevedon - Philadelphia

SKOWRONEK, H. (1970): *Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung*. Hannover: Schroedel

SKYPEK, D. H. (1981): Teaching Mathematics: Implications from a Theory for Teaching the Language Arts. *Arithm. Teacher* 28 (7), 13 - 17

SMEDSLUND, J. (1961): The aquisition of conservation of substance and weight in children. *Scandinavian Journal of Psychology* 2, 11 - 20, 71 - 84, 156 - 160, 203 - 210

SPANHEL, D. (1973): Die Schülersprache. Formen und Funktionen im Lernprozeß. In SPANHEL, D. (Hrsg.): *Schülersprache und Lernprozesse*. Düsseldorf: Schwann, 159–192

SPELKE, E. (1995): Initial knowledge: six suggestions. In MEHLER, J. & FRANCK, S. (Hrsg.): *Cognition on cognition*. Cambridge, Mass./London, England: The MIT Press, 433 - 447

SPERANZA, F.(1989): Matematica e linguaggio. *L'educazione matematica* v.10(2), 97 - 114

STALLINGS, J. A. (1976): How instructional processes relate to child outcomes in a national study of follow through. *J. of Teacher Education* 27(1), 43 - 47

STEINER, H.-G. (1988): Über Metaphern, Modelle und Mathematik. In BENDER, P (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin: Cornelsen, 190 - 201

STIGLER, J. W. & BARNES, R. (1988): Culture and mathematics learning. In ROTHKOPF, E. Z. (Hrsg.): *Review of Research in Education*. Washington, DC: American Educational Research Ass. 15, 253 - 306

SULLIVAN, P. & CLARKE, D. (1988): Asking students better questions in mathematics. *J. of Science and Mathematics in Southeast Asia* 11(1), 14 - 18

SWINSON, K. (1992): Writing activities as strategies for knowledge construction and the identification of misconceptions in mathematics. *J. of Science and Mathematics Education in Southeast Asia* 15(2), 7 - 14

SZEMERÉNYI, O. (1980): *Einführung in die vergleichende Sprachwissenschaft*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

TEIGELER, P. (1968): *Verständlichkeit und Wirksamkeit von Sprache und Text*. Stuttgart: Nadolski

The Mathematical Association (1987): *Maths Talk*. Cheltham: Stawley Thornes Ltd.

THIESEMANN, F. H. (1988): Zum Textverstehen von Anwendungsaufgaben - Aspekte zur Förderung des Leseverstehens im Mathematikunterricht. In *Mathematik Lehren* 29, 20–31

THOMPSON, Th. M. (1983): *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packings to Simple Groups.* The Mathematical Association of America

TIETZE, U.-P.; KLIKA, M.; WOLPERS, H. (unter Mitarbeit von F. FÖRSTER) (1997): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Band 1. Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis.* Braunschweig/Wiebaden: Vieweg

TOWSE, J.N. & SAXTON, M. (1997): Linguistic Influences on Children's Number Concepts: Methodolocigal and Theoretical Considerations. *Journal of Experimental Child Psychology* 66, 362 - 375

TROPFKE, J. (1980): *Geschichte der Elementarmathematik.* 1.Bd. *Arithmetik und Algebra* (neu bearbeitet von K. VOGEL, K. REICH und H. GERICKE). Berlin usw.: De Gruyter

ULIJN, J.M. & STROTHER, J.B. (1995): *Communicating in Business and Technology: From Psycholinguistic Theory to International Practice*. Frankfurt am Main: Peter Lang

VAN DER WAERDEN, B.L. (1954 a): *Einfall und Überlegung*. Basel/Stuttgart: Birkhäuser

VAN DER WAERDEN, B.L. (1954 b): Denken ohne Sprache. *Acta Psychologica*, Band X. Amsterdam: North Holland, 165 - 174

VAN LINT, J. H. (1992): *Introduction to Coding Theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer

VARNHORN, B. (1993): *Adjektive und Komparation*. Studien zur deutschen Grammatik 45. Tübingen: G. Narr

VATER, H. (1994): *Einführung in die Sprachwissenschaft*. München: Fink

VIET, U. (1978): Umgangssprache und Fachsprache im Geometrieunterricht des 5. und 6. Schuljahres. In BAUERSFELD, H: (Hrsg.): *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel, 13 - 23

VOIGT, J. (1984): *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Fallstudien*. Weinheim: Beltz

VOIGT, J. (1989): Thematische Prozeduren im Unterrichtsalltag. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 378 - 381

VOLLRATH, H.-J. (1978): Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben. In *Schriftenreihe des IDM* 18, 57 - 73

VOLLRATH, H. - J. (1992): Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweisens. *Mathematische Semesterberichte* 30 (2), 127 - 136

WAGENSCHEIN, M. (1965): *Ursprüngliches Verstehen und Exaktes Denken*. Stuttgart: Klett

WANDRUSZKA, M. (1981): *Die Mehrsprachigkeit des Menschen*. München: Deutscher Taschenbuchverlag

WATSON, H. (1990):The Ganma Project: Research in Mathematics Education by the Yolngu Community in the Schools of Laynhapuy (N.E. Arnhemland). In *Language Issues in Learning and Teaching Mathematics*. Institute of Mathematics Education. La Trobe University, 33 - 50

WAYWOOD, A. (1992): Journal Writing and Learning Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 12 (2), 34 - 43

WELLS, C. (1997): *A Handbook of Mathematical Discourse*. *Version* 0.7 [Preliminary version. Erhältlich über die Internetadresse http://www-math.cwru.edu/~cfw2/handbook.htm

WERTHEIMER, M. (1964^2): *Produktives Denken*. Frankfurt: Frankfurt: Kramer

WHORF, B.L. (1963): *Sprache, Denken, Wirklichkeit.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuchverlag

WINTER, H. (1972): Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In *Beiträge zum Lernzielproblem*. Schriftenreihe des MK von NRW. Kastellaun

WITTGENSTEIN, L. (1973): *Tractatus locico - philosophicus*. Frankfurt: Suhrkamp

WITTMANN, G. (1996): Eine Unterrichtssequenz zum Vektorbegriff in der Sekundarstufe I. *mathematica didactica* 19 (2) 1 - 24

WODE, D. (1976): Mathematikunterricht und Spracherziehung. *Der Mathematikunterricht*, (1), 44 - 64

WOODROW, D. (1982): Mathematical Symbolism. *Visible Language* 16 (3), 289 - 302

WYGOTSKI, L. S. (1974): *Denken und Sprechen*. Stuttgart: Fischer

YOUNG, A. (1983): Teaching mathematics in a second language, with special reference to Jamaica. In ZWENG, M. (Hrsg.): *Proc. Fourth International Congress on Math. Education*. Boston/Basel/Stuttgart, 583 - 586

ZIMMER, D.E. (1995): *So kommt der Mensch zur Sprache.* München: Heyne

Anhänge zu Maier & Schweiger: „Mathematik und Sprache“

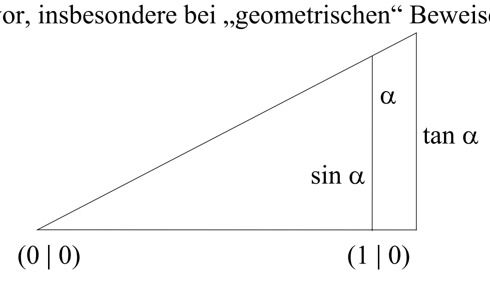
Die Bibliographie zur zitierten Literatur findet sich am Schluss des Buchtextes.

Anhang 1: Kodierung von Information

Lesen, Schreiben und Rechnen. Diese drei Kulturtechniken sind der Grundpfeiler der elementaren Schulbildung (wobei *elementar* im ursprünglichen Sinn, nämlich als ‘grundlegend’ zu verstehen ist; lat. *elementum* bzw. griech. στοιχειον bedeutet ‘Buchstabe’ und ‘Grundbegriff’; griech. στοιχειον bedeutet auch die zum Messen der Zeit aufgerichtete Stange der Sonnenuhr). Diese drei Kulturtechniken sind entscheidend mit der Entwicklung der Schrift verbunden. Die Sprache ist wohl so alt wie die Menschheit, nicht aber die Möglichkeit, in Sprache gefasste Gedanken schriftlich zu fixieren. Es kann hier nicht der Ort sein, die Entstehung der Schrift bzw. der vielen Schriften, die in der Geschichte der Menschheit bisher entwickelt wurden, auch nur zu skizzieren. Der interessierte Leser sei auf FROMKIN & RODMAN 1981 oder KUCKENBURG 1989 oder HAARMANN 1991 verwiesen (um nur einige der vielen relevanten Titel zu nennen). Für die Mathematik bedeutsam erscheint Folgendes:

(1) Die Fixierung mathematischer Inhalte mit Hilfe von Schrift oder anderer materieller Techniken ist möglicherweise die älteste Vorform schriftlicher Techniken. Einfache Hilfsmittel dieser Art sind Kerbstöcke, Stäbe aus Holz, Knochen oder anderem Material, auf denen Zahlenangaben oder andere Informationen durch eingeschnittene oder eingeritzte Markierungen festgehalten sind. Diese Methode konnte zur Zählung von Beute- oder Weidetieren ebenso verwendet werden wie zur Zählung von Kokosnüssen, aber auch als Kalender oder Ahnenregister. Strichlisten auf Bierfilzen sind immerhin auch heute noch üblich. Über den weltweiten Gebrauch derartiger Techniken kann kein Zweifel bestehen.
Schwieriger ist die Beurteilung vorgeschichtlicher Funde, die bis auf 300 000 Jahre zurückdatiert werden. Ob die Ritzlinien auf diesen Artefakten (meist Knochenstücken) tatsächlich Zahlbedeutungen hatten oder vielleicht „nur“ ornamentalen Charakter hatten, kann nicht mit Sicherheit entschieden werden. Auch die Deutung des als mesolithisch datierten Knochens aus Ishango in Zentralafrika als Mondkalender wirkt ebenso verblüffend wie sie letztlich nicht beweisbar ist. Erwähnenswert sind auch die von Schmandt-Besserat ausführlich untersuchten Tonmarken (‘Rechensteine’, im englischen Text *tokens* genannt) aus Vorderasien, deren unterschiedliche Formen und Markierungen als Zeichen für besondere wirtschaftliche Einheiten wie ‘ein Scheffel Getreide’, ‘ein Krug Öl’, ‘ein Vlies Wolle’ usw. interpretiert werden (siehe DAMEROW & LEFÈVRE 1981, KUCKENBURG 1989, SCHMANDT-BESSERAT 1992). Hinzuweisen ist auch auf den Gebrauch von Knotenschnüren, wie er für die Verwaltung des Inkareiches - diese Schnüre werden *quipus* genannt - bekannt ist.

(2) Die Mathematik verwendet nach wie vor nebeneinander die Grundtypen von Schriftsystemen. Ein Grundtypus kann als Ideenschrift bezeichnet werden. Hier wird eigentlich kein sprachlicher Ausdruck fixiert, sondern ein Gedankenkomplex bildlich dargestellt. (Die Abgrenzung zur bildenden Kunst - auch ein Gemälde oder eine Skulptur beinhalten expressive und kommunikative Elemente - ist natürlich oft schwierig!). Ein berühmtes Beispiel ist die auf Büffelfell aufgezeichnete Stammeschronik der Dakota, die denkwürdige Ereignisse vom Winter 1800/01 bis zum Winter 1870/71 durch Bildsymbole festhält. Diese Symbole sind meist nicht abstrakt, sondern gegenständlich (d. h. Menschen und Tiere sind erkennbar). Dennoch bedarf es einer zusätzlichen basierten Erklärung, um den Sinn letztlich zu erschließen. Etwas Ähnliches liegt bei mathematischen Skizzen und Zeichnungen vor, insbesondere bei „geometrischen“ Beweisen.



Die abgebildete Figur enthält bildliche Elemente wie Winkel, Kreisbögen und Segmente, jedoch daraus einen Beweis für die Beziehung

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

abzulesen, bedarf zusätzlicher Interpretation, die in Deutsch wie in Japanisch gegeben werden kann.

Eine besondere Form der Ideenschrift liegt in den von LEROI-GOURHAN (1980) so genannten Mythogrammen vor, bildliche Symbole, die in einem sprachlichen kulturellen Kontext geeignet sind, über die unmittelbare Bedeutung hinaus, ein semantisches Feld oder eine Erzählung zu assoziieren. So können religiöse oder politische Symbole an damit verbundene Systeme, ihre Bedeutung für das eigene Leben und ihre Rolle in der Geschichte der Menschheit erinnern.

Ein weiterer Grundtypus ist die Wort- und Begriffsschrift (Logographie), bei der ganze Wörter bzw. Begriffe durch Bildsymbole (oder durch aus Bildsymbolen entstandene Zeichen) wiedergegeben werden. Solche Bildsymbole spiegeln in ihrer Reihenfolge die syntaktische Struktur der zugrunde liegenden Sprache wieder, aber sie sind letztlich nicht an diese Sprache gebunden. Das Zeichen 中 wird auf Chinesisch *zhōng* gelesen, auf Japanisch sowohl *chu* (sogenannte ON-Lesung) als auch *naka* (sogenannte KUN-Lesung) und bedeutet 'Mitte'. Ebenso kann in einem mathematischen Text das Zeichen ∫ auf Deutsch *Integral (von)* gelesen werden aber auf Japanisch *sekibun (no)*; die Bedeutung bleibt dieselbe. Logogramme finden sich in vielen Fachsprachen, wie z. B. die Zeichen § für Paragraph, ® für geschütztes Markenzeichen, $\hbar$ für die durch 2π dividierte Plancksche Wirkungskonstante, $ und £ für die Währungsnamen Dollar und Pfund, @ nun als Teil von E-Mailadressen, ♀ als Zeichen für weibliches Geschlecht und vieles anderes mehr. Logogramme kommen auch in der internationalen Kommunikation vor, vor allem auf Flughäfen, Bahnhöfen und touristischen Plätzen als Zeichen für Postamt ✉, Telefon ✆ oder Lebensgefahr ☠ usw. Auch die Verkehrszeichen können hier eingeordnet werden. Wie man an diesen oder anderen Beispielen sieht, sind viele Logogramme aus Piktogrammen (Bildsymbolen) entstanden, wie die schon genannten Zeichen ✉ oder ✆. Andere Logogramme sind Abkürzungen, aber oft ist eine historische Kenntnis erforderlich um dies noch zu erkennen (z.B. £ ist ein stilisiertes L als Abkürzung für lat. *librum* 'Pfund', ® steht für *registered* 'eingetragenes [Warenzeichen]' usw.

Wortschriften dürften jedenfalls am Anfang des dritten Typus der Silben- und Buchstabenschriften (Phonographie) gestanden sein. Dies kann man deutlich an der Entwicklung der japanischen Silbenschriften (Hiragana und Katakana) erkennen, deren Zeichen aus chinesischen Schriftzeichen entwickelt wurden, aber ebenso an der Entwicklung der ägyptischen Schriften und der Keilschrift, die beide nicht als bloße Wortschriften bestehen blieben, sondern bei denen neben Ideogrammen sehr früh Phonogramme d. h. Lautzeichen auftraten. Das Zeichen ◡ für *nb* 'Korb' dient auch zur Wiedergabe von *nb* 'jeder'; aber *nb* wird (zusammen mit einem Zeichen für MANN) auch 'Herr' gelesen oder ist Bestandteil von *nbw* 'Gold' (siehe HAARMANN 1991, S. 221). Es muss hier angemerkt werden, dass auch die chinesische Schrift nicht aus Ideogrammen besteht, sondern sich sehr früh ein kompliziertes System entwickelt hat, wo ähnlich lautende Wörter durch Logogramme wiedergegeben werden, die durch Zusammensetzung verschiedener Ideogramme entstehen. Dabei ist die historische Entwicklung allerdings oft viel komplexer und lässt sich nur durch die Lautverhältnisse im älteren Chinesisch erklären (siehe etwa CHANG & SCROGIN CHANG 1978). So bedeutet das (vereinfachte!) Zeichen 气 *qi* 'Luft, Geist', aber mit dem Determinativ für Wasser zusammengesetzt 汽 *qi* 'Dampf' oder 工 *gōng* 'Arbeit; Arbeiter' und wieder mit dem Determinativ für Wasser 江 *jiāng* 'Fluss'. Dennoch hat die chinesische Schrift ihren einzigartigen logographischen Charakter bewahrt. Dafür dürften zwei Gründe maßgeblich sein: Die chinesische Sprache war zumindest in ihrer klassischen Form überwiegend monosyllabisch, d. h. die meisten Wörter des Grundwortschatzes waren einsilbig, was heute nicht mehr der Fall ist. Die chinesische Sprache verwendet kaum grammatische Morpheme (d. h. unselbständige Lautkomplexe, mit denen syntaktische und semantische Merkmale kodiert werden; vgl. chinesisch *wǒ lái* 'ich komme', *nǐ lái* 'du kommst'), die ihrer Natur nach zu einer phonographischen Darstellung herausfordern (wie dies im Chinesischen auch passiert ist: das bei belebten Wesen verwendete Pluralsuffix *men* wird durch das mit dem Zeichen für *rén* 'Mensch' modifizierte Zeichen für *mén* 'Tür' dargestellt.). Natürlich ist die chinesische Schrift heute auch ein einigendes Band in einem riesigen Staat, in welchem zahlreiche Sprachen und Dialekte gesprochen werden.

Auch die historisch gewachsenen Buchstabenschriften haben sich aus Wortschriften entwickelt, obwohl gerade die frühen Stadien dieser Entwicklung noch sehr im Dunkeln liegen. SCHMANDT-BESSERAT (1992) vertritt die

These, dass die Erfindung der Schrift in Mesopotamien auf die Verwendung der erwähnten 'Rechensteine' zurückzuführen sei.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass mathematische Texte an allen drei Schriftarten Anteil haben:

- Ideenschrift: Zeichnungen, Skizzen, ...
- Logographie: Zahlzeichen, Symbole, Sonderzeichen, ...
- Phonographie: textliche Darstellung der verbindenden Sprache

Beim Lesen oder Erfassen eines Textes müssen diese Schriften in verschiedenem Umfang in gesprochene oder gedachte Sprache übersetzt werden. Dabei lässt sich die Ideenschrift auf viele Arten interpretieren und die textliche Darstellung der verbindenden Sprache wird ähnlich wie beim Lesen anderer Texte mit einer gewissen Genauigkeit „zurückübersetzt". Die größte Aufmerksamkeit erfordert aber die Logographie, da dort die Informationsdichte am größten ist.

(3) Mathematische Texte beachten üblicherweise auch die <u>lineare Anordnung</u> der Sprache, in der sie ausgedrückt werden, aber die Reihenfolge der Aussprache bzw. des Lesens oder Schreibens mathematischer Ausdrücke folgt oft Konventionen, die man lernen muss. Die Formel y = f(x) wird gelesen "y ist gleich f von x" und nicht etwa "y ist gleich f runde Klammer auf x runde Klammer zu" oder man denke an den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, welcher "n über k" gelesen wird. Formeln und Diagramme können nicht immer linear abgearbeitet werden. Sie verlangen beim Lesen manchmal nicht nur eine Rechts-Links-Bewegung der Augen, sondern auch eine Aufwärts-Abwärts-Bewegungen, und mehrfaches Lesen ist für den Ungeübten erforderlich (DALE & CUEVAS 1987). Die nachfolgenden Beispiele sprechen für sich:

$$\int_0^1 x^2 dx \,, \quad \frac{x^2+1}{x-1} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G/N \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \rightarrow & H/O \end{array}$$

Auch die Reihenfolge von Operatoren ist konventionell: Man vergleiche etwa x^2 und sin x. Bei vielen Taschenrechnern muss man in beiden Fällen zuerst das *x* eintippen und dann die entsprechende Funktionstaste drücken. Eine top-down Strategie würde aber mit den Funktionen 'Quadrat' oder 'Sinus' beginnen und dann das Argument *x* eingeben.

Zum Thema Schriftsprache und Mathematik gehört natürlich auch die korrekte Schreibweise von Fachwörtern, wobei sich zahlreiche Querverbindungen zu den klassischen Sprachen und das Englische ergeben. (Das Thema Fachwörter wird im Hauptteil ausführlich dargestellt.) Die Orthographie der deutschsprachigen Länder ist hier eher „konservativ"; man schreibt *Isomorphismus* (derzeit noch) mit *ph* entsprechend der griechischen Herkunft (griechisch *μορφη Gestalt, Form*). Im Italienischen ist dagegen *isomorfismo* üblich.

(4) Am auffälligsten ist die Verwendung der symbolischen Schreibweise, die historisch mit der Entwicklung des abendländischen Kulturraumes zusammenhängt. Es werden die Buchstaben des Alphabets *a, b, c, ... , x, y, z, ...* so auffällig gebraucht, dass für viele Nichtmathematiker die Verwendung von Buchstaben typisch für Mathematik ist: Formeln wie $x + y = z$ oder $a^2 + b^2 = c^2$ erinnern jedermann sofort an Mathematik. Daneben werden auch andere Typen (wie Fettdruck, Zierbuchstaben...) und Zeichen anderer Alphabete verwendet, vor allem aus dem griechischen Alphabet: α, β, γ,.... Zumindest ein hebräischer Buchstabe hat sich durchgesetzt: ℵ für Kardinalzahlen (in der Mengenlehre) und ein kyrillisches Zeichen: Ш für die Schafarevitschgruppe in der algebraischen Zahlentheorie. Es gibt aber auch noch hochgestellte und tiefgestellte Indizes wie a_1, b^2,... und diakritische Zeichen wie ~ , ' , * ,.... Dazu treten noch besondere Zeichen wie ∂, $\int$, $\subseteq$, $\in$,...

Die Kenntnis einer gewissen Anzahl dieser Zeichen und ihre richtige Interpretation im gegebenen Zusammenhang ist notwendig, um die kommunikative Kraft der Mathematik würdigen zu können. Oft ist auch der Kontext entscheidend, wie richtig zu lesen ist. Beispielsweise steht die Zeichenreihe 11 zumeist für 'elf'. Hingegen wird bei einer Matrix $A = ((a_{ij}))$ das Zeichen a_{11} als 'a-eins-eins' gelesen. In der Mathematik interpretiert man $a - b$ meist als 'a minus b', hingegen im Alltag *2 – 4 Wochen* als 'zwei bis vier Wochen'. Die Verwendung von Symbolen ist heute charakteristisch für mathematische Texte. Definitionen werden in einen einzigen Buchstaben oder in eine kleine Zeichenkette verpackt. Diese Tatsache fordert auch das Kurzzeitgedächtnis (wenn die Symbole - wie die Pronomina - auswechselbar sind und eine vorübergehende Bedeutung haben) und das Langzeitgedächtnis (wenn die Symbole - wie Eigennamen - relativ feste Konventionen widerspiegeln wie etwa ∂ oder $\int$) heraus. Eine gewisse Ähnlichkeit mit der musikalischen Notation ist festzustellen. Auch sie ist nicht einfach linear, und die Dekodierung gelingt oft erst durch aktive Wiedergabe auf einem Instrument. Da ist es in der Mathematik sogar leichter, denn da kann man Andante oder Allegro wählen, je nach Vorkenntnis und Begabung. Entscheidend sind vor allem die Richtigkeit eines vorgelegten Beweises oder die Korrektheit einer Berechnung und nicht die dafür aufgewandte Zeit.

In den letzten hundert Jahren ist eine Flut neuer Medien zum Speichern und zur Übertragung von Informationen entstanden. Für die Übertragung seien als Stichworte genannt: Rundfunk, Fernsehen, Telefon und Telegrafie usw. Dabei sind Leitungskabel und modulierte elektromagnetische Wellen die wichtigsten Übertragungsmedien. Der Unterschied zwischen analoger Signalverarbeitung und digitaler Signalverarbeitung ist durch die komplexe Art der Datenaufnahme, Datenübertragung und Datenwiedergabe fließend geworden. Für eine digitale Signalverarbeitung ist jedoch die Benützung eines Kodes wesentlich. Das Morsealphabet kann dafür als klassischer Prototyp angesehen werden. Für die Speicherung von Informationen seien genannt: Schallplatte, Tonband, Compact Disc, Speichermedien für computergesteuerte Information, wie Diskette, Festplatte, usw. Da es sich hier meist um gewaltige Mengen digitaler Informationen handelt, ist auch hier die Kodierung von Informationen notwendig. Eine CD mit ca. 75 Minuten Spielzeit hat etwa 20 Milliarden Bits („channel bits“) gespeichert. Da die Informationstheorie und die Kodierungstheorie in den letzten Jahren sich zu selbständigen großen Teildisziplinen entwickelt haben, kann hier nur auf einige wenige Bücher verwiesen werden wie VAN LINT (1992) oder SCHULZ (1991). Eine gute Darstellung der Anfangsgründe der Kodierungstheorie und deren überraschende Querverbindungen zu geometrischen Problemen (Kugelpackungen) und zur Gruppentheorie bietet THOMPSON (1983).

Kodes müssen oftmals Fehler erkennen und auch korrigieren können. Zur Illustration sei auf einen bekannten fehlerkorrigierenden Kode hingewiesen, den (7,4)-Hamming Kode. Hier wird zunächst jede Zahl zwischen 0 und 9 in gewohnter Weise binär kodiert und sodann werden an erster, zweiter und vierter Position drei Prüfziffern c_6, c_5 und c_4 eingeführt. Ist $c = c_3c_2c_1c_0$ (= $c_0+2c_1+4c_2+8c_3$) die binäre Kodierung, so sei das Kodewort $c^\# = c_6c_5c_3c_4c_2c_1c_0$ derart bestimmt, dass folgende Gleichungen gelten:

$$r_0 \equiv c_6+c_3+c_2+c_0 \equiv 0 \pmod 2$$

$$r_1 \equiv c_5+c_3+c_1+c_0 \equiv 0 \pmod 2$$

$$r_2 \equiv c_4+c_2+c_1+c_0 \equiv 0 \pmod 2$$

Dies ergibt sodann die nachstehende Tabelle:

Dezimalzahl	Binärzahl	Hammingkode
0	0000	0000000
1	0001	1101001
2	0010	0101010
3	0011	1000011
4	0100	1001100

Dezimalzahl	Binärzahl	Hammingkode
5	0101	0100101
6	0110	1100110
7	0111	0001111
8	1000	1110000
9	1001	0011001

Wenn das Kodewort $c^\#$ gesendet wird, so kann es durch Übertragungsfehler dazu kommen, dass statt $c^\#$ das Kodewort $d^\# = d_6d_5d_3d_4d_2d_1d_0$ empfangen wird. Nun berechnet man die sogenannten Syndrome $s_0, s_1, s_2 \in \{0,1\}$ durch die Gleichungen

$s_2 \equiv d_4+d_2+d_1+d_0 \pmod 2$
$s_1 \equiv d_5+d_3+d_1+d_0 \pmod 2$
$s_0 \equiv d_6+d_3+d_2+d_0 \pmod 2$

Tritt nur <u>ein</u> Fehler auf, indem c_i durch $d_i = c_i+1 \bmod 2$ ersetzt wurde (d. h., statt $c_i = 0$ wird 1 empfangen oder statt $c_i = 1$ wird 0 empfangen), so ergibt die Zahl $s_0+2s_1+4s_2$ gerade die Position des Fehlers. Dies ist durch direktes Probieren leicht zu sehen:

$d_0 = c_0+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (111)_2 = 7$	$d_4 = c_4+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (100)_2 = 4$
$d_1 = c_1+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (110)_2 = 6$	$d_5 = c_5+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (010)_2 = 2$
$d_2 = c_2+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (101)_2 = 5$	$d_6 = c_6+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (001)_2 = 1$.
$d_3 = c_3+1$ ergibt $s_2s_1s_0 = (011)_2 = 3$	

(Man kann dies auch so einsehen: Es ist $4s_2+2s_1+s_0 = 7d_0 + 6d_1 + 5d_2 + 4d_4 + 3d_3 + 2d_5 + d_6$. Ist daher aber $d_2 = c_2 + 1 \bmod 2$ und beachtet man, dass $4r_2 + 2r_1 + r_0 = 0$, so ist $4s_2 + 2s_1 + s_0 = 5$, d. h. der Fehler steht an der 5. Position von links gezählt.)

Zur Niederschrift von Musik wurden verschiedene Formen der <u>Notenschriften</u> entwickelt. In der heute weitverbreiteten abendländischen Notenschrift stecken übrigens eine Reihe mathematischer Details:

– Brüche werden zur Angabe des Taktes verwendet (beachte, dass ein 3/4-Takt von einem 6/8-Takt verschieden ist)
– Zeitwerte werden durch ein relativ komplexes, aber optisch einprägsam notiertes System von Brüchen angegeben
–

𝅝 $= 1$ 𝅗𝅥 $= \frac{1}{2}$ ♩ $= \frac{1}{4}$ ♪ $= \frac{1}{8}$ 𝅘𝅥𝅯 $= \frac{1}{16}$

Ein nachgestellter Punkt stellt mathematisch den Operator $x \mapsto \frac{3}{2}x$ dar, z. B.

♩ $= \frac{1}{4}$, ♩. $= \frac{3}{8}$

Vorzeichen sind Verschiebungsgeneratoren (die Tonhöhe wird um einen Halbton erhöht oder erniedrigt; in der temperierten Stimmung bedeutet dies für die Frequenz $\nu \mapsto \sqrt[12]{2}\nu$ bzw. $\nu \mapsto \frac{\nu}{\sqrt[12]{2}}$), z. B. #C = Cis, bA = As, usw.

Die Kurzschrift (oder Stenographie) kann zunächst als eine Vereinfachung einer Alphabetschrift aufgefasst werden (der Zeichenkörper wird reduziert) und die Vokale zwischen Konsonanten durch Verschmelzung mit dem vorhergehenden Konsonanten und die Position des nachfolgenden Konsonanten dargestellt. Tatsächlich ist aber die Kurzschrift weitgehend eine Logographie, denn für häufig auftretende Wörter und Silben gibt es eigene Zeichen („Kürzel“).

In der Blindenschrift (zurückgehend auf *Barbier* und *Braille*) werden die Buchstaben, Satzzeichen und Ziffern binär kodiert. Der Kode besteht aus einem Rechteck mit 3 x 2 = 6 Feldern, in denen ein tastbarer Punkt vorhanden oder nicht vorhanden ist, so dass theoretisch $2^6-1 = 63$ Zeichen kodiert werden können, z. B.

•	•			•	
•		= F,	•		= S.
			•		

Auch die Blindenschrift verwendet zur rascheren Lesbarkeit Kürzel und wurde für verschiedene Wissenschaften, einschließlich Mathematik weiterentwickelt. An weiteren speziellen Alphabeten ist auch das <u>Lormalphabet</u> zu nennen. Dieses von *Lorm* (eigentlich *Landesmann*) erfundene Alphabet dient zur Verständigung mit taubblinden Menschen, indem mit den Fingern (des Zeichengebers) Zeichen in die Hand (des Empfängers) geschrieben werden.

In der Schifffahrt gibt es ein international festgelegtes Flaggenalphabet, in welchem die 26 Buchstaben durch farbig und geometrisch gestaltete Flaggen dargestellt werden, welches allerdings durch die Verwendung des Sprechfunks an Bedeutung verloren hat. Ebenfalls schon nur mehr von historischer Bedeutung ist das Morsealphabet (nach *Morse*, einem Pionier der Telegraphie), welches einen binären Kode mit den Zeichen • und } sowie variabler Kodewortlänge darstellt. Da diese Kodewortlängen näherungsweise umgekehrt proportional zur Häufigkeit des kodierten Buchstaben sind, wurde damit ein wichtiger Grundgedanke der von später *Shannon* entwickelten Kodierungstheorie vorweg genommen.

Damit sind wir auch schon bei den zahlreichen modernen Kodierungen angelangt, von denen der ASCII-Kode (ASCII steht für American Standard Code for Information Interchange) einer der bekanntesten ist. Im 7-Bit-ASCII können daher $2^7 = 128$ Zeichen dargestellt werden, wobei ein zusätzliches achtes Bit als Kontrollbit hinzugefügt wird. In vielen Computerprogrammen wird die Nummer eines ASCII-Zeichens auch hexadezimal (d. h. in einem Zahlsystem zur Basis $b = 16$ mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) dargestellt.

Im Alltag werden zusehends Kodes zur Identifizierung von Waren (EAN-Nummer) oder Büchern (ISBN-Nummer) verwendet, die im Prinzip zwar numerische Kodes (mit eingebautem Prüfsystem) sind, aber meist durch maschinenlesbare Strichkodes dargestellt werden, die erstaunlich kompliziert sind (siehe JUNGNICKEL 1995). Diese Kodes sind allerdings von sehr eingeschränkter Reichweite, da sie im Gegensatz zu einem Alphabet, in welches grundsätzlich jede Art von Information übertragbar ist, nur bestimmte Typen von Information erfassen.

Anhang 2: Zahlwörter

Zahlwörter gehören zum Grundwortschatz des mathematischen Registers (mit diesem Begriff bezeichnet - wie schon erwähnt - HALLIDAY (1974) jenes Subsystem einer natürlichen Sprache, mit welchem mathematische Sachverhalte beschrieben werden). Semantisch gesehen sind sie Quantoren und geben Antwort auf Fragen der Art *Wie viele? Wie viel? Wie oft? Der (die) das wievielte?* Die Zusammengehörigkeit von Quantoren und Zahlwörtern (allgemeiner: Phrasen), die Zahlwörter enthalten, wird durch den Austauschtest bestätigt:

- *Wie viele* Pferde sind auf der Koppel? *Sechs* Pferde sind auf der Koppel. *Alle* Pferde sind auf der Koppel... *Wie viel* hat Julia gewonnen? Julia hat *sechs Millionen Mark* gewonnen. Julia hat *nichts* gewonnen ...
- *Wie oft* warst Du in Italien? Ich war schon *dreimal* in Italien. Ich war *oft* in Italien...
- *Den wievielten* Platz hat Hans eingenommen? Hans war *dritter*. Nein, Hans war *letzter*...

Das Thema Zahlen und Zählen ist ungemein reichhaltig. Das Buch MENNINGER (1958) bringt – obgleich im sprachwissenschaftlichen Material nicht immer zuverlässig! – viel Interessantes zur Entwicklung der Zähltechniken und des Rechnens. Als klassische sprachwissenschaftliche Studie zu diesem Thema ist GREENBERG (1978) zu nennen. Ferner sei auf SCHWEIGER (1987, 1996a und1997) verwiesen. Gegenstand der nachfolgenden Überlegungen sind Zahlwörter für natürliche Zahlen und davon abgeleitete Bildungen. Die Benennungen und Schreibweisen für ganze Zahlen (positive und negative Zahlen, die Zahl Null), für rationale Zahlen (durch Brüche, speziell als Dezimalbrüche repräsentiert), für reelle Zahlen (mit den wichtigen Untermengen der irrationalen und transzendenten Zahlen), für komplexe Zahlen oder letztlich für weitergehende Verallgemeinerungen der Zahlbereiche (hyperkomplexe Zahlen, Non-Standard-Zahlen etc.) werden nicht betrachtet. Hier muss auf die Literatur zur Entwicklung der Zahlbegriffe und der Elementarmathematik verwiesen werden (etwa GERICKE 1970, SCRIBA 1968 und TROPFKE 1980).

a) Klassen von Zahlwörtern

Zahlwörter können in zwei Klassen eingeteilt werden: Grundzahlwörter und abgeleitete Zahlwörter. Grundzahlwörter bezeichnen die Zahlwörter, die vor allem zum Zählen benutzt werden: *eins, zwei, drei, vier, ...* Abgeleitete Zahlwörter werden auch zum Zählen benützt, aber in speziellen Kontexten, z.B. Ordnungszahlwörter zur Angabe eines Ranges (der *achte* Tag), Vervielfältigungszahlwörter (*viermal*, *zehnmal, doppelt, tausendfach*), Bruchzahlwörter (*anderthalb*, *ein Fünftel*); Verteilungszahlwörter (*je zwei*, *zu dritt*) usw.

Allerdings ist diese Einteilung unscharf. Paraphrasen wie: Dies war *der dritte* Streich = Dies war Streich *Nummer drei* zeigen, dass die Verwendung der verschiedenen Zahlwörter überlappen kann. Auch die Bezeichnung abgeleitete Zahlwörter bedarf einer Erläuterung: Abgeleitete Zahlwörter werden in besonderen Situationen (meist durch Messprozesse besonderer Art festgelegt) verwendet. Sie sind in der Regel durch Derivation aus dem jeweiligen Grundzahlwort herleitbar:

zwei	>	*zweiter*			
drei	>	* *dreiter*	sondern	>	*dritter*

Sie können syntaktisch einer Kategorie zugeordnet werden: Ordnungszahlwörter sind Adjektive, die allerdings keine Steigerung kennen wie auch einige andere Adjektive wie *lebend, weiß* (von Waschmittelreklamen abgesehen) usw. Vervielfältigungszahlwörter sind Adverbien: *einmal, tausendmal* (was meist nur *oft* bedeutet!).

Die Gesamtheit der Grundzahlwörter ist im Allgemeinen nicht eindeutig einer syntaktischen Kategorie zuzuordnen: *eins* wird nur absolut (in der Zahlreihe) oder prädikativ gebraucht ("*dieses Parfum ist Nummer eins*"). Im attributiven und auch prädikativen Gebrauch wird das Adjektiv verwendet: *ein Mann, eine Frau, "Höre Israel, dein Gott ist nur einer*" usw. Die Zahlwörter *zwei, drei, vier*, ... sind zumeist unveränderlich: *zwei Frauen, drei Bäume*. Allerdings gibt es Spuren einer früheren Flexion der Zahlwörter *zwei* und *drei*, wie etwa die Verwendung von *zwo* (zur besseren Unterscheidung von *zwei*) oder in schon fast literarisch anmutenden Sätzen wie *Das Bellen zweier Hunde wurde hörbar*. Aber *Million* ist noch ein Hauptwort (und wird daher im Deutschen groß geschrieben). Es kommt ohne Beisetzung von 1 nicht aus: *eine Million Dollar* und nicht **Million Dollar*. Man kann sagen: *Eine Million Heuschrecken verwüstete Ägypten* oder *Eine Million Heuschrecken verwüsteten Ägypten.* Im ersten Satz ist *eine Million* “Kopf“ der Nominalphrase, verlangt also Einzahl und *Heuschrecken* ist ein Genitiv Plural, der den “Kopf“ modifiziert. Im zweiten Fall ist *Heuschrecken* der “Kopf“, verlangt die Mehrzahl und *eine Million* ist Attribut. Jedenfalls muss man sagen: *zwei Millionen.* Die Zahlwörter für 100 und 1000 sind kaum mehr substantivisch: man kann sowohl *hundert Mäuse* wie *einhundert Mäuse* sagen, aber in beiden Fällen ist *Mäuse* der “Kopf“ der Nominalphrase: *(Ein)hundert Mäuse bevölkerten den Keller*. Allerdings gebraucht man die Wendung *Hunderte von Mäusen*, keinesfalls jedoch **Zweihunderte*.

b) Zur Bildung von Grundzahlwörtern

Im Weiteren wird die Bildung von Grundzahlwörtern besprochen. Zur Illustration werden neben Deutsch auch andere Sprachen herangezogen. Dies hat zwei Gründe: Zum einen finden sich Zahlwörter in allen Sprachen und ihre vielfältige Bildung spiegelt die Kreativität menschlicher Denkprozesse wider. Zum Anderen können viele Phänomene nur in anderen Sprachen dokumentiert werden. Das Thema Bildung von Zahlwörtern kann somit auch Anregungen für einen fachübergreifenden Unterricht mit Sprachlehrern liefern.

Zahlwörter können opak oder analytisch gebildet sein. Opake Zahlwörter bestehen aus einem Wort (im linguistischen Fachjargon: Morphem) und ihr numerischer Wert ist nicht ohne weiteres erkennbar. Wer Türkisch lernt, muss lernen, dass 1,2,3,4,...... eben *bir, iki, üç, dört*,...... heißt. Manchmal gibt es noch Beziehungen zu Körperteilen, etwa Samoanisch *lima* (= 5) bedeutet auch ‘Hand’ (also ‘5 Finger’), aber in der Regel sind derartige Beziehungen vage und auch innerhalb der historischen Linguistik umstritten. Natürlich ist opak ein relativer Begriff: Wenn man weiß, dass *zwanzig* 2 ×10 bedeutet, kann man *vierzig* als 4 x 10 interpretieren, d. h.. die Endung -*zig* als × 10 analysieren (allerdings ist **dreizig* nicht korrekt!). Die naheliegende Bildung **zweizehn* existiert nicht und *vierzehn* bedeutet 4 + 10! Das Wort *zwölf* kommt aus dem Althochdeutschen *zwelif,* wörtlich ‘2 übrig’, wenn man 10 abzieht, bleiben noch 2 übrig! Zu Recht wird man daher *zwölf* als opak bezeichnen! Halten wir fest: Jede Zählreihe beginnt mit einigen opaken Zahlwörtern. Später werden noch einige weitere opake Zahlwörter gebildet, aber Lücken gelassen. Diese werden dann durch analytisch gebildete Zahlwörter gefüllt. Solche analytische Bildungen können Ableitungen oder Zusammensetzungen sein.

<u>Ableitungen</u> kommen bei der Bildung von Grundzahlwörtern relativ selten vor. Zu nennen ist etwa die Verwendung des Duals und Plurals im Maltesischen:

3	*tlieta*	30	*tletin*
4	*erbgħa*	40	*erbgħin*
5	*ħamsa*	50	*ħamsin*
6	*sitta*	60	*sittin*
7	*sebgħa*	70	*sebgħin*
8	*tmienja*	80	*tmenin*
9	*disgħa*	90	*disgħin*

Der Plural von z = 3 bis 9 bedeutet also 10 × z. Überraschenderweise bedeutet *għoxrin*, der Plural von *għaxra* (= 10) aber 20.

Duale finden sich bei:

100	*mija*	200	*mitejn*
1000	*elf*	2000	*elfejn*

Die überwiegende Zahl aller Zahlwörter wird aber durch <u>Zusammensetzung</u> gebildet. Diese Bildungen sind in praktisch allen Fällen als verbale Abbildungen arithmetischer Prozesse analysierbar, wobei man allerdings Allomorphe zulassen muss, d. h. etwa *zig* als Allomorph zu *zehn*, was in vielen Fällen mit der historischen Analyse korrespondiert. Ein Allomorph ist ein Morphem, welches in bestimmten Situationen für ein anderes Morphem “einspringt“, d. h.. dessen Bedeutung übernimmt. So lautet der Komparativ von *schön* regelmäßig *schöner*, aber von *gut* richtig *besser*, d. h. **bes(s)* ist ein Allomorph zu *gut* innerhalb des Paradigmas Komparativ. Oder im Englischen: Das Präteritum zu *go* ‘gehen‘ wird von einem Allomorph **wen* gebildet und lautet *went*.

Als arithmetische Prozesse kommen Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division und Exponentiation in Frage. Die letzten drei Möglichkeiten sind nur sporadisch verwirklicht und lassen sich rasch abhandeln:

– Subtraktion: Lateinisch *duodeviginti* = ‘zwei von zwanzig’ = 18
– Division: Bretonisch *hanterkant* = ½ × 100 = 50
  Ein Sonderfall ist die Bildung der Zahlwörter für 50, 70 und 90 im Dänischen, wo Bruchzahlwörter eine Rolle spielen, wie zum Beispiel:
  50 = *halvtreds* < *halvtred-sinds-tyve* = 2½ × 20
– Exponentiation: Dieser Prozess ist in der Neuzeit produktiv geworden. Aus dem Italienischen *milione* (wörtlich ‘großes Tausend’) entstand *Million* (= 10^6). Daraus entstanden neu $10^{12} = (10^6)^2$ = *Billion*, $10^{18} = (10^6)^3$ = *Trillion* usw. Ohne Kenntnis der historischen Basis bedeutet heute *-llion* also 10^6 und die Vorsilben *bi-*, *tri-* usw. jeweils ‘hoch zwei’, ‘hoch drei’,...... Übrigens wird bei den Maßeinheiten ein anderes System von Vorsilben zur Bezeichnung von Zehnerpotenzen verwendet wie z. B. *hekto* = 10^2, *kilo* = 10^3, *mega* = 10^6, *milli* = 10^{-3}, *mikro* = 10^{-6}. Deren Verwendung ist allerdings oft noch konventionell geregelt: *Kilometer* ist üblich, aber **Megameter* nicht. In der Datenverarbeitung wird eine etwas andere Skala verwendet:
  - 1 *Kilobyte* = 2^{10} = 1024 Bytes ≈ 1000 Bytes
  - 1 *Megabyte* = 2^{20} = 1 048 576 Bytes ≈ 1 Million Bytes.

c) Additive Bildung von Grundzahlwörtern

Betrachtet man die Sprachen der Welt, so ist folgende universelle Tendenz beobachtbar: Ist $x > y$, so bedeutet die Aufeinanderfolge von Zahlwörtern für x und y den Zahlenwert $x + y$. Ist bei einer additiven Bildung $x + y$ hingegen $x < y$, so sprechen wir von “Inversion“. Beispiele:

– Juxtaposition
  Zwei Zahlwörter werden nebeneinandergestellt:

Deutsch	*hundertzwei*	(= 100 + 2)
Englisch	*twenty-one*	(= 20 + 1)
Türkisch	*yirmi dokuz*	(= 20 + 9)

– Juxtaposition mit Inversion

Deutsch	*dreizehn*	(= 3 + 10)
Lateinisch	*undecim*	(= 1 + 10)

– Morphologische Markierung
  Damit ist gemeint, dass die Addition durch ein eigenes Morphem, welches zumeist ‘und’ bedeutet, ausgedrückt wird:

Deutsch	*tausendundeins*	(= 1000 + 1)

  [Dies ist eine stilistische Variante zu *tausendeins*.]

Portugiesisch	*cento e oitenta e três*	(= 100 + 80 + 3)

  Im Ungarischen wird zum Teil der Lokativ verwendet:
  10 = *tíz*, 3 = *három*, 13 = *tizenhárom* (wörtlich: ‘drei auf zehn’)

– Morphologische Markierung bei Inversion

Deutsch	*dreiundzwanzig*	(= 3 + 20)
Maltesisch	*wieħ ed-u-għ oxrin*	(= 1 + 20)

– Überzählung

Eine merkwürdige Strategie ist erwähnenswert. Man nennt die nächst höhere "runde Zahl" und zugleich wie weit man bis dahin gezählt hat. Diese Strategie findet man im Alttürkischen:

9 = *toquz*, 20 = *yigirmi*, aber *toquz yigirmi* bedeutet 9 [unter] 20, also 19.

Ähnlich ist auch Finnisch *yksitoista* = 2 in der zweiten [Dekade] = 12 zu deuten.

d) Multiplikative Bildungen

In diesem Fall ist die umgekehrte Tendenz zu beobachten: Ist x < y, so bedeutet die Aufeinanderfolge von Zahlwörtern für x und y den Zahlenwert x × y. Ist bei einer multiplikativen Bildung diese Regel nicht erfüllt, so sprechen wir wieder von "Inversion".

– Juxtaposition

Dies ist die häufigste Art der multiplikativen Bildung:

Deutsch	*fünfhundert*	(= 5 x 100)
Englisch	*three hundred*	(= 3 × 100)
Bahasa Indonesia	*dua puluh*	(= 2 × 100)

Akzeptiert man *zig* als Allomorph zu zehn, so auch

Deutsch	*vierzig*	(= 4 × 10)

– Juxtaposition mit Inversion

Sumerisch	600 = *geš-u* = 60 × 10
	1200 = *geš-u-min* = 60 × 10 × 2
Mada	24 = *se wa* = 12 × 2
	36 = *se tar* = 12 × 3

– Morphologische Markierung

Hier gibt es drei Untertypen:

(1) Das erste Zahlwort wird durch ein Morphem mit der Bedeutung 'mal' markiert.

Griechisch 1000 = *χιλιοι*
2000=*διςχιλιοι*

[*δις* bedeutet 'zweimal', ist also nicht bloß ein Allomorph zu *δυο* = 2].

(2) Das zweite Zahlwort wird durch ein Morphem markiert. Dies kann eine Pluralbildung sein wie

Deutsch:	3000000 = *drei Millionen*	
Lateinisch	1000 = *mille*	2000 = *duo milia*

Aber auch eine Genitivverbindung ist möglich

Arabisch 300 = *ṯalâṯu mi´atin*

[wörtlich 'drei von hundert']

(3) Beide Markierungen treten zugleich auf.

Lateinisch 1 000 000 = *decies centena milia* = 10 × 100 × 1000

[*decies* bedeutet 'zehnmal', *centeni* ist ein Adjektiv, welches als Zahlwort für Wörter benutzt wird, die morphologisch Pluralformen sind, aber semantisch Singular und Plural bedeuten können, wie etwa *unae litterae* 'ein Brief', *centenae litterae* 'hundert Briefe'].

– Morphologische Markierung mit Inversion

Es ist fraglich, ob dieser Fall auftritt.

e) *Zusammenspiel mehrerer arithmetischer Prozesse*

Es seien nochmals die beiden universellen Tendenzen bei additiven und multiplikativen Bildungen referiert:
Ist $y < x$, so bedeutet eine Aufeinanderfolge von Zahlwörtern für x und y den Zahlenwert $x + y$.
Ist $x < y$, so bedeutet eine Aufeinanderfolge von Zahlwörtern für x und y den Zahlenwert $x \times y$
Werden beide Tendenzen befolgt, so ist die Dekodierung komplexer Zahlwörter einfach.
Chinesisch: *èrshíèr* = $2 \times 10 + 2 = 22$

Werden diese Tendenzen nicht eingehalten, so sind Strategien notwendig, die eindeutige Dekodierung zu sichern. Die beiden wichtigsten Strategien sind:

– Verwendung von Allomorphen

Deutsch	*vierzehn* = $4 + 10 = 14$
	vierzig = $4 \times 10 = 40$
Bahasa Indonesia	*empat belas* = $4 + 10 = 14$
	empat puluh = $4 \times 10 = 40$

– Verwendung morphologischer Markierungen

Deutsch	*dreiundzwanzig* = $3 + 20 = 23$

Selbstverständlich können in einer Sprache verschiedene Aufbauprinzipien verwendet werden. Im Slowakischen werden die Zahlen von 11 - 19 durch Juxtaposition mit Inversion gebildet:

11 = *jedenást´,* 12 = *dvanást´*, ...

Die Zahlwörter von 21 - 29 durch Juxtaposition:

20 = *dvadsat´*, 21 = *dvadsat´ jeden*, 22 = *dvadsat´ dva*, ...

Im Deutschen sind *elf* und *zwölf* opak, *dreizehn* bis *neunzehn* durch Juxtaposition mit Inversion gebildet, hingegen 21 - 29 durch morphologische Markierung mit Inversion!

f) *Aufbauprinzipien*

Der Aufbau der Folge der Zahlwörter lässt sich durch etwa vier Prozesse charakterisieren:
– Bildung von Folgen von Zahlwörtern mit Lücken
– Auffüllen dieser Lücken
– Ausgleich von Teilen dieser Folge
– phonologische Veränderungen.

Jede Folge von Zahlwörtern beginnt mit einer kurzen Folge opaker Zahlwörter. Sodann werden einige Zahlwörter für größere Zahlenwerte hinzugefügt. Im Bild kann man vom Bau einer Brücke sprechen, wo die Pfeiler zuerst gebaut werden. Ein Zahlwort für 10 wird vermutlich früher gebildet als ein Zahlwort für 9, ein Zahlwort für 100 wird verwendet, lange bevor man bis 94 zählen musste. Diese alten "Brückenpfeiler" sind daher ebenfalls opak. In weiteren Schritten werden die Lücken zwischen den Pfeilern aufgefüllt. Hierbei sind es vor allem die zuvor dargelegten arithmetischen Prozesse, die verwendet werden. Sehr oft werden verschiedene Formen der Wortbildung durch Analogien und Ausgleichsprozesse vereinheitlicht. Letztlich finden immer wieder phonologische Veränderungen statt, die oft ältere Bildungen wieder (nahezu) opak werden lassen. Diese Prozesse können dabei mehrfach durchlaufen werden. Nehmen wir etwa Lateinisch:

11 = undecim	12 = duodecim	13 = tredecim	....
17 = septendecim	18 = duodeviginti	19 = undeviginti	....

Die Zahlwörter von 11 bis 17 sind additiv, 18 und 19 subtraktiv gebildet. Im Französischen sind die Zahlwörter für 11 bis 16 erhalten, aber phonologisch stark verändert:

11 = onze	12 = douze	13 = treize	14 = quatorze	15 = quinze	16 = seize

Die Zahlwörter für 17, 18 und 19 hingegen sind durch Juxtaposition neu gebildet:

17 = dix-sept 18 = dix-huit 19 = dix-neuf

Im Rumänischen werden die Zahlwörter von 11 bis 19 überhaupt aus altem Material neu gebildet (durch Inversion und Einfügung von *spre* < Lateinisch *supra*):

unsprezece, ... ,nouă sprezece.

Jüngeren Brückenpfeilern sieht man zumeist an, dass sie aus Nomina entstanden sind. Sie verlangen sehr oft die Beifügung des Zahlwortes für 1 und verhalten sich syntaktisch wie Nomina. So kann man im Deutschen keineswegs sagen **Ein zehn Schafe sind hier*, wohl aber *Hundert* (oder *einhundert*) *Schafe sind hier* und *Eine Million (zwei Millionen) Schafe sind hier.* Der Satz **Million Schafe sind hier* jedoch gilt als ungrammatisch. Man sagt auch nicht **zwei Million*, aber *zweihundert* (und nicht **zwei Hunderte*). Der Brückenpfeiler *zehn* verhält sich nicht wie ein Hauptwort, *hundert* erlaubt die Beifügung von 1, *Million* erfordert die Beifügung von 1 und wird bei multiplikativen Bildungen in den Plural gesetzt!

Die zuvor genannten Ausgleichsprozesse können zu phonologischen Veränderungen Anlass geben: Lateinisch *quattuor* (= 4) hat **pinque* zu *quinque* verändert. Im Baltoslawischen hat das Zahlwort für 10 das Zahlwort für 9 im Anlaut verändert; man findet im Slowakischen daher *desat´*(= 10) und *devät´*(= 9) statt **nevät´*(wie es von Deutsch *neun* oder Lateinisch *novem* zu erwarten wäre).

g) Systeme mit Basis b

In vielen Zahlwortsystemen findet man folgende Regularität beim Aufbau der "Brückenpfeiler": Die wichtigsten Brückenpfeiler bilden eine geometrische Folge mit Multiplikator b. So praktisch und selbstverständlich uns dies auch erscheinen mag – vor allem, wenn wir an den uns vertrauten Fall $b = 10$ denken – die geschichtliche Entwicklung von Zahl- und Maßsystemen zeigt, dass sich eine Fülle konkurrierender Systeme entwickelt hat. Beim Zählen größerer Anzahlen hat sich sehr früh die Technik der Bündelung als praktisch erwiesen. Bis heute ist es etwa üblich Strichlisten so zu zählen: nach 4 Strichen wird der 5. Strich als Querstrich gesetzt, wodurch ein übersichtliches Bündel entsteht und man zählt die 5-erbündel und den Rest: I, II, III, IIII, ~~IIII~~, ...

Das alte britische Währungssystem hatte die Faktoren 12 und 20:

12 pence = 1 shilling
20 shillings = 1 pound.

Viele Faktoren sind aus praktischen Gründen des Transportes bzw. der Verpackung erklärbar:

1 Kiste Bier	= 20 Flaschen Bier
1 Kiste Mineralwasser	= 12 Flaschen Mineralwasser
1 große Schachtel Eier	= 10 Eier
1 Trage Bier	= 6 Flaschen Bier

Wie man sieht, sind diese Faktoren stark kontextabhängig, eine Tatsache, die man bis in das 6. Jahrtausend v. Chr. zurückverfolgen kann (siehe DAMEROW & LEFÈVRE 1981). In vielen Zahlwortsystemen ist auch deutlich erkennbar, dass verschiedene Faktoren miteinander in Konkurrenz standen: So ist das französische Zahlwortsystem (als Erbe aus dem Lateinischen) wohl auf der Basis $b = 10$ aufgebaut, doch finden sich deutlich Spuren der Basis $b = 20$:

60 = *soixante* <	Lat. *sexaginta*
70 = *soixante-dix*	(= 60 + 10)
80 = *quatre-vingts*	(= 4 × 20)
90 = *quatre-vingt-dix*	(= 4 × 20 + 10).

Die häufigste Basis weltweit dürfte $b = 10$ zu sein. Dies scheint mit den zehn Fingern zum Zählen zusammenzuhängen. Vom mathematischen Standpunkt wäre Basis $b = 12$ etwas praktischer, da dann alle Brüche, deren Nenner nur durch 2 und 3 teilbar sind, endliche *b*-adische Brüche sind. Ihre Verwendung ist in Mada belegt (SHIRLEY 1989):

24 = *se wa* = 12 × 2
36 = *se tar* = 12 × 3
48 = *se nzhe* = 12 × 4
144 = *naa*

Viele Zahlwortsysteme haben nur einige Brückenpfeiler entwickelt – mit oft verschiedenen Faktoren; man kann hier besser von Zyklen oder Rhythmen sprechen. Die Basis *b* = 20 ist im klassischen Maya belegt, die Basis *b* = 60 im Sumerischen. Obwohl die Zahl 5 in vielen Zahlwortsystemen deutliche Spuren hinterlassen hat wie z.B. Walisisch 15 = *bymthec*, 16 = *un ar bymthec* (= 1 + 15), 17 = *dou ar bymthec* (= 2 + 15), 19 = *pedwar ar bymthec* (= 4 + 15), jedoch ist 18 = *deu naw* (= 2 × 9), ist die Basis *b* = 5 selten. Ein Beispiel findet man im australischen Gumatj (HARRIS 1982):

5 = *wanggany rulu* (= 1× 5)
6 = *wangany rulu ga wanggany* (= 1 × 5 + 1), …
25 = *dambumirriw rulu* (= 5 × 5)
26 = *dambumirriw rulu ga wanggany* (= 5 × 5 + 1)

h) Abgeleitete Zahlwörter

Die wichtigsten abgeleiteten Zahlwörter sind Ordnungszahlwörter, Bruchzahlwörter, multiplikative und distributive Bildungen. Typisch für diese Ableitungen ist, dass sie zumeist am Anfang irregulär sind, oft sogar suppletiv (d. h.. von einer anderen Wurzel abgeleitet sind) und erst nach und nach eine reguläre, d. h.. vorhersagbare Ableitung stattfindet.

Im Deutschen hat man etwa

	Kardinalzahlwörter	Ordnungszahlwörter
1	*eins*	*erste* [nicht **einste oder *einte*]
2	*zwei*	*zweite*
3	*drei*	*dritte* [nicht **dreite*]
4	*vier*	*vierte*
5	*fünf*	*fünfte*
6	*sechs*	*sechste*

Bis 19 ist die Ableitung mittels -*te* regelmäßig; dann aber lautet das Suffix -*ste*:

20	*zwanzig*	*zwanzigste*
100	*hundert*	*hundertste*
1000	*tausend*	*tausendste*
10^6	*Million*	*millionste*

Bei zusammengesetzten Zahlwörtern gilt zu unterscheiden, ob die Ableitung das Zahlwort als Ganzes erfasst oder einzelne Teile. Man vergleiche etwa Lateinisch

11	*undecim*	*undecimus*
12	*duodecim*	*duodecimus*
13	*tredecim*	*tertius decimus*
14	*quattuordecim*	*quartus decimus*

mit Deutsch

11	*elf*	*elfte*
12	*zwölf*	*zwölfte*
13	*dreizehn*	*dreizehnte*
14	*vierzehn*	*vierzehnte*

Im Englischen hat man:

	1	*one*	*first* [nicht **oneth*]
	2	*two*	*second* [nicht **twoth*]
	3	*three*	*third* [nicht **threeth*]
	4	*four*	*fourth*
	5	*five*	*fifth*
	6	*six*	*sixth*
	7	*seven*	*seventh*
	8	*eight*	*eighth*
	9	*nine*	*ninth*
	10	*ten*	*tenth*
aber	21	*twenty-one*	*twenty-first*

[aber nicht **twenty-oneth*! Dies ist nicht so unlogisch; im Französischen findet man

1	*un, une*	*premier, première*
21	*vingt-et-un*	*vingt-et-unième*].

In bestimmten Kontexten können niedrige Ordnungszahlwörter durch spezielle Wörter ersetzt werden:
n-ter Grad (einer Gleichung, eines Polynoms,...): *linear* = *ersten Grades*, *quadratisch* = *zweiten Grades*, *kubisch* = *dritten Grades*, *biquadratisch* = *vierten Grades n-te Ordnung* (eines Gliedes, ...): *linear* = *erster Ordnung*, *quadratisch* = *zweiter Ordnung*, *kubisch* = *dritter Ordnung*
n-te Potenz: *Quadrat*, *Kubus*, *Biquadrat*
x zur n-ten: *x-quadrat; x hoch y*: *x-quadrat;*
Wurzel: *Quadratwurzel*, *Kubikwurzel*

Bruchzahlwörter sind im Deutschen im Allgemeinen von den Ordnungszahlwörtern abgeleitet:

ein X-ter Teil wird zu *ein X-tel*.

Daher hat man:
ein dritter Teil wird zu *ein Drittel*
ein vierter Teil wird zu *ein Viertel* usw.

Unregelmäßig ist: Statt **zweitel* sagt man *Halb(es)* mit der Mehrzahl *Halbe*, also 1/2 = *ein Halb(es)* und 5/2 = *fünf Halbe*. Für 3/2 sagt man *drei Halbe* oder *anderthalb*. Dieses Wort ist abgeleitet aus der Phrase *vom anderen* (= *vom zweiten*) *fehlt noch ein Halbes*. Ähnlich Lateinisch 2½ = *sestertius* < **semis tertius*, d. h.. *vom dritten [As] fehlt noch ein Halbes*. Diese Bildung findet sich auch im Ungarischen:
harmadfél = 2½ (zu *három* = 3)
Die anderen Bruchzahlen sind im Deutschen unveränderlich: *drei Viertel, zu fünf Sechstel, von acht Neuntel*. Gemischte Zahlen werden durch Juxtaposition ausgedrückt (wobei *ein Halbes* zu *ein halb* verkürzt wird):

2 ¾ = *zwei drei Viertel*

5 ½ = *fünf ein halb*

oder durch Einfügung von *Ganzes / Ganze* und *und* verdeutlicht:

2 ¾ = *zwei Ganze (und) drei Viertel*

5 ½ = *fünf Ganze (und) ein Halbes.*

Von 1 wird keine Bruchzahl abgeleitet; dennoch ist zur Not *eintel* (vgl. *n-tel* als Bruch mit Nenner *n*) erlaubt, wie man an dem etwas gequält wirkenden Bruch 4/101 = *vier (ein)hunderteintel* (wohl besser: *vier gebrochen durch hunderteins*) sieht. Von Bruchzahlen werden auch Verben abgeleitet: *halbieren, dritteln, vierteln, ...*
PIMM (1987) weist darauf hin, dass Bruchzahlen im Alltag noch stärker als Bruchteile empfunden werden und daher syntaktisch die Mehrzahl verlangen können. *Drei Viertel <u>sind</u> mehr als zwei Fünftel*. Hingegen werden in

der Mathematik Bruchzahlen als Namen für Zahlen aufgefasst, so dass man sagen kann: *Drei Viertel* <u>*ist*</u> *größer als zwei Fünftel.*

Multiplikative Bildungen sind im Deutschen ziemlich regelmäßig:

einmal, zweimal, dreimal, ... , x-mal.

Allerdings heißt es *einmal* und nicht **einsmal*; ferner gibt es das Synonym *doppelt* für *zweimal.* Im Lateinischen wird die Reihe *semel, bis, ter, quater* erst ab 5 (*quinquies* zu *quinque*) etwas regelmäßiger. Das Verhalten skalierbarer Adjektive bezüglich Vervielfältigung ist nicht ohne Tücken, wie VARNHORN (1993) bemerkt. So bedeutet *doppelt so teuer* Multiplikation mit dem Faktor 2, aber *dreimal so billig* Multiplikation des Preises mit dem Faktor 1/3. Hat es in Regensburg 21° C und ist es in Athen *doppelt so heiß*, so hat es dort 42° C. Hat es in Regensburg aber - 8° C und ist es in Grönland *viermal so kalt*, so ist - 32° C gemeint. Wenn es aber in Regensburg 6° C hat und jemand würde sagen, in Amsterdam sei es *doppelt so kalt*, so würde er damit vermutlich 3° C meinen (also Multiplikation mit dem Faktor 1/2). Ähnliche Überlegungen gelten auch für die Adjektive *schwer* und *leicht*, *dick* und *dünn* etc.

Von diesen Zahlen werden auch Adjektive

einmalig, zweimalig, ..., mehrmalig

abgeleitet. Das Adjektiv *einmalig* hat dabei eine übertragene Bedeutung angenommen (wie großartig, wichtig, ...). Eine weitere multiplikative Reihe ist

einfach, zweifach [auch *doppelt*], *..., mehrfach, vielfach*

(Das Adjektiv *einfach* hat auch die übertragene Bedeutung *schlicht* angenommen.) Von dieser Reihe werden auch Verben abgeleitet

vereinfachen, verzweifachen, ..., vervielfachen.

Allerdings ist **vermehrfachen* nicht gebräuchlich. Statt *verzweifachen* kann man auch *verdoppeln* verwenden. In vielen Fällen ist n-*fach* fast bedeutungsgleich *n-mal*(*ig*), aber nicht immer: *Das Formular ist vierfach auszufertigen. Das Formular ist viermal auszufertigen. Wir haben gestern die dreifache Menge Brot gekauft als sonst. *Wir haben gestern die dreimalige Menge Brot gekauft als sonst. Eine dreimalige Wiederholung der Prüfung ist zulässig. *Eine dreifache Wiederholung der Prüfung ist zulässig.* Insgesamt scheint die Nachsilbe -*fach* eher die Vorstellung einer simultanen Vervielfachung nahezulegen, die Nachsilbe -*malig* indes eher die einer im zeitlichen Nacheinander.

Eine andere Reihe ist

einfältig, zweifältig (oder *zwiefältig*), *dreifältig, ... vielfältig*

Das Wort *einfältig* hat aber einen Bedeutungswandel in Richtung *töricht* erfahren. Im religiösen Sprachgebrauch wird *dreifaltig* statt *dreifältig* verwendet. Das Adjektiv **mehrfaltig* ist blockiert. Nur wenige Substantiva sind üblich: *Einfalt*, *Vielfalt*, *Dreifaltigkeit, ...* In *Mannigfaltigkeit* (einem Grundbegriff der modernen Differentialgeometrie) ist das verwandte englische Wort *many* erkennbar.

Distributive Bildungen sind im Deutschen regelmäßig:

je ein, je zwei, je drei, ...

Auch hier ist das Lateinische lehrreich:

singuli, bini, terni (oder *trini*), ...

Fast regelmäßig sind im Deutschen gewisse kollektive Zahladverbien von den Ordnungszahlen abgeleitet:

zu zweit, zu dritt, zu viert, ...

Allerdings wird von 1 nicht **zu erst* sondern *allein* abgeleitet (*zuerst* hat eine andere Bedeutung). Hier konkurrieren auch noch einige alte Bildungen, in denen Deklination erkennbar ist:

zu zweien, zu dreien, zu hunderten.

Eine weitere Reihe mit Unregelmäßigkeiten am Anfang ist:
Zwilling, Drilling, Vierling, ...

Naturgemäß fehlt hier eine entsprechende Bildung zu 1; ebenso würden **Hundertlinge*, wie sie bei lebendgebärenden Zahnkarpfen vorkommen, etwas merkwürdig klingen. Der Ausdruck *Vielling* bezeichnet in der Mineralogie eine Bildung aus mehreren Kristallen.

Eine Welt für sich sind zahlreiche Hauptwörter mit inhärenter Zahlbedeutung: Manche von diesen Wörtern sind isolierte Einzelgänger wie *Dutzend* (= 12) oder *Troika* (= ein Gespann mit 3 Pferden), *Pentagramm* und *Hexagramm*. Ein *Elfer* ist im Fußball ein Strafstoß aus 11 m Entfernung. Bei Spielkarten sagt man *As* statt *Einser*. Im österreichischen Tarock heißt der Einser *Pagat* [wohl zu ital. *bagattino*, einer venezianischen Münze geringen Wertes; vgl. *Bagatelle*], der Zweier *Uhu*, der 21-er *Mond* und der 22-er *Sküs* [vermutlich zu ital. *scusa* 'Entschuldigung', denn das ist eine besondere Karte]. Ein *Millionär* hat mehrere Millionen Vermögen.

Zahlwörter können auch substantiviert werden. *Einer, Zehner, Hunderter, ...* werden in der Grundschularithmetik verwendet, um das dekadische Stellenwertsystem zu strukturieren. *Einser* (nicht Einer!), *Zweier*, *Dreier*, ... bezeichnen die Zahlen als geschriebene Symbole (insbesondere auch Schulnoten). *Fünfer*, *Zehner*, *Zwanziger*, *Hunderter*, ... treten als Bezeichnungen für Münzen und Banknoten auf (wobei **Millioner* noch nicht gebildet werden musste!). Der *Einundfünfziger* kann für die Autobuslinie mit der Nummer 51 stehen.

Eine besondere Verwendung hat das Zahlwort *beide*. Es setzt voraus, dass die genannten Gegenstände bekannt und identifizierbar sind: *Ein König hatte zwei Töchter.*(nicht: **Ein König hatte beide Töchter.*) *Beide Töchter waren sehr schön.*
Ein König hatte drei Töchter. Zwei Töchter waren sehr schön (nicht: **Beide Töchter waren sehr schön*).

Grundzahlwörter können auch als Vorsilben auftreten: *zweiteilen, Zweisamkeit, vierteilen, ...*Statt *zwei-* ist in alten Bildungen *zwie-* aufweisbar: *Zwietracht, Zwiespalt, Zwielicht, ...* Die Vorsilbe *doppel-* ist enger als die Zahlbedeutung von 2. Dies ist an Beispielen wie *Doppelpunkt* (als Satzzeichen) und *Doppelvokal* oder *Doppelkonsonant* (Boot schreibt man mit Doppel-o, Mutter mit Doppel-t) erkennbar. Wie beim Wort *Paar* ist eine gewisse Zusammengehörigkeit im Spiel (vgl. auch ein *Doppel* für ein Tennisteam aus zwei Spielern). In der Mathematik steht doppel- für zweifach: *Doppelwurzel*, *Doppelpunkt* (bei Kurven!), ... Allerdings ist das Wort **Doppelnullstelle* nicht üblich (man bevorzugt hier: *doppelte Nullstelle*). Die Zahlbedeutung 1 kann durch die Zusammensetzung mit *einzel-* vermittelt werden: *Einzelzimmer,* aber nicht **Einzelpunkt*. Auch Ordnungszahlwörter treten als Vorsilben auf: *Erstgeborener, Zweitehe, Drittmittel, ...*

Andere Reihen sind aus entlehntem Material aufgebaut. Als Beispiele seien erwähnt: *Terzett* (= ein Musikstück für 3 Stimmen), *Trio* (= ein Musikstück für 3 Instrumente; eine Gruppe, bestehend aus 3 Musikern; der Mittelteil eines Menuettes oder eines Marsches), *Quinte* (= ein Intervall, welches in der Tonleiter 5 Töne umfasst), *Triole* (= 3 Noten, die auf einem Viertelton Platz finden müssen, also eigentlich eine Figur aus 3 Zwölftelnoten!) usw. Gerade in der Musiktheorie sind diese Reihen oft sehr uneinheitlich. *Ein Streichquartett spielt Streichquartette, aber ein Bläsertrio spielt ein Terzett für drei Blasinstrumente ....*

Dazu kommen viele mathematische Fachausdrücke, die eine Zahlbedeutung beinhalten: *Quadrat* (= regelmäßiges Viereck), *Tetraeder* (= regelmäßiges Polyeder mit 4 Flächen), statt des möglichen Wortes *Hexaeder* ist allerdings *Würfel* gebräuchlich, *Oktaeder* (= regelmäßiges Polyeder mit 8 Flächen), ebenso wäre **Pentaeder* eine mögliche Wortbildung, aber ein derartiges reguläres Polyeder existiert nicht, *Quaternion* (= hyperkomplexe Zahl mit 4 Komponenten) usw. Zu erwähnen ist auch die aus dem Lateinischen abgeleitete Reihe

?*unär, binär, ternär, ...*

Eine interessante gemischte Reihe ist

Paar, Tripel, Quadrupel, Quintupel, ... n-Tupel

Das lateinische Wort *duplum* lebt in den Lehnwörtern *doppelt* und *Duplikat* weiter, wurde aber in dieser Reihe durch das Wort *Paar* ersetzt. Die lateinischen Wortbildungen *triplum* und *quadruplum* sind aus der entsprechenden Kardinalzahl und dem Morphem *plum* (vgl. *plicare* ‘falten’) gebildet. Bei *Quintupel* taucht hingegen die Ordnungszahl *quintus* auf. Möglicherweise hat dies zur falschen Abtrennung *Quin-tupel* und damit zum neuen Morphem -*tupel* geführt!

Die Vorsilbe *hemi-* (in *Hemisphäre*) für ‘halb’ stammt aus dem Griechischen, die gleichbedeutenden Vorsilben *semi-* (in *Semikolon*) aus dem Lateinischen und *demi-* aus dem Französischen (in *Demimonde*). In der linearen Algebra gibt es *sesquilineare* Formen, d. h. Abbildungen in zwei Variablen, die „anderthalb“-linear sind. Das lateinische Adverb *sesqui* (entstanden aus **semisque* ‘[einer] und ein Halbes’) hat tatsächlich die Bedeutung 1½.

i) Zählwörter

Zählwörter gibt es im Deutschen nur sporadisch: *drei Stück Vieh, fünf Kopf Salat, zwei Sorten Wein.* Gebraucht werden diese Zählwörter vor allem bei Wörtern, die kollektive Bedeutung haben (und daher keine Mehrzahl bilden!).

In vielen anderen Sprachen, vor allem in Ostasien, werden Zahlwörter in attributiver Stellung nur zusammen mit sogenannten Zählwörtern verwendet. So werden im Japanischen Menschen mit -*nin* gezählt (natürlich mit einigen Unregelmäßigkeiten am Anfang):

sannin kyôdai = 3 Brüder.

Bücher werden mit -*satsu* gezählt:

hon gosatsu = 5 Bücher.

Bananen werden mit -*bon* gezählt:

banana sanbon = 3 Bananen.

In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass wiederholt die These vertreten wurde, dass die Verwendung ‘konkreter’ Zahlwörter (kontextabhängiger Zahlwörter, d. h. Menschen, Kokosnüsse oder Kanus etwa werden auf verschiedene Art gezählt) älter als die Verwendung ‘abstrakter’ Zahlwörter (das sind Zahlwörter ohne Referenz auf spezielle Objekte) sei, bzw. dass die ‘abstrakten’ Zahlwörter sich aus ‘konkreten’ Zahlwörtern entwickelt haben (SCHMANDT-BESSERAT 1992). Viele in der Literatur angeführte Beispiele lassen sich allerdings durch Verschmelzung von Zahlwörtern mit Zählwörtern erklären.

Anhang 3: Formale Sprachen, Automaten und Fraktale

In der "Strukturalismus" genannten Richtung der Sprachwissenschaft wird Sprache "analysiert", indem die Funktionen der beobachteten Formen beschrieben werden. In der "generativen Grammatik" untersucht man, Systeme von Regeln aufzustellen, welche Syntagmen (Fügungen), Sätze und Texte erzeugen, die innerhalb einer Sprache als "korrekt" angesehen werden[1]. Beide Richtungen führen auf interessante mathematische Modelle. Insbesondere die Modelle der generativen Grammatik haben in der Forschung breite Resonanz gefunden, da sie eng mit Vorstellungen und Techniken zusammenhängen, die (größtenteils unabhängig voneinander) in verschiedenen Gebieten entstanden sind: in der mathematischen Logik und Grundlagenforschung (Stichwörter: Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Turingmaschine), in der Theorie der formalen Sprachen, in der Automatentheorie, in der Iterationstheorie und in der Beschreibung und Erzeugung von Fraktalen. Dabei kommt, wie wir an einem Beispiel sehen werden, die Dualität zwischen Erkennen und Herstellen, also Analyse und Synthese, oft deutlicher als in der beschreibenden Sprachwissenschaft zum Ausdruck.

Die grundlegende Idee ist der Begriff der *Regel* (oder *Produktion*). Ausgangspunkt ist ein Startobjekt O_0. Auf dieses Startobjekt O_0 werden Regeln angewandt, die aus $O_0{}'$ ein neues Objekt O_1 machen, auf welches aber die (gegebenen) Regeln wiederum angewandt werden können, so dass O_2 entsteht usw.

Die berühmte Schneeflockenkurve kann so erzeugt werden: Startobjekt ist ein gleichseitiges Dreieck Δ_0. Die Regel lautet:

Ersetze jedes Segment durch den Polygonzug 

Dann erhält man Δ_1. Hier wird nun wieder jedes Segment durch einen Polygonzug ersetzt usw.

Diese Regel kann durch die Anwendung von vier Ähnlichkeitsabbildungen beschrieben werden. Auf diese Weise kann man Fraktale erzeugen, die oft auch ästhetisch reizvoll aussehen (siehe dazu etwa BARNSLEY 1988, EDGAR 1990 und *besonders für den Gebrauch in der Schule NEIDHARDT & ZEITLER 1994[2]).

Aristid Lindenmayer (s. PRUSINKIEWICZ & HANAN 1980) hat die nach ihm benannten L-Systeme zur formalen Beschreibung des Pflanzenwachstums vorgeschlagen. Wesentlich ist hier die *parallele* Anwendung der Regeln: Im n-ten Schritt muss auf jedes Teilobjekt eine Regel angewandt werden. Nehmen wir die beiden Regeln $a \to ab$ und $b \to a$. Ist das Startobjekt das Wort $w_0 = a$ so enthält man die Folge

$$w_0 = a \to w_1 = ab \to w_2 = aba \to w_3 = abaab \to w_4 = abaababa \to ...$$

Der Vorgang muss aber nicht deterministisch ablaufen, d. h. es können auch mehrere Regeln vorgesehen werden, z. B. $a \to ab$ und $a \to ba$. Dann erhält man aus $w_0 = a$ nach n Schritten bis zu 2^n Objekte, die Wörter genannt werden, etwa nach 2 Schritten

$a \to ab \to aba$ $\qquad a \to ab \to baa$ $\qquad a \to ba \to aab$ $\qquad a \to ba \to aba$

[In diesem Fall führen zwei verschiedene Ableitungen zum selben Wort.] Man kann auch Ableitungen dieser Art in geometrische Modelle umsetzen. Eine Übersetzung mit Hilfe der Schildkröte à la LOGO ist beschrieben in PRUSINKIEWICZ & HANAN (1980), wo sich auch schöne computergenerierte botanische Formen finden.

Eine andere sehr beliebte Möglichkeit ist die Beschreibung einer Sprache durch Rekursion. Ein einfaches Beispiel ist die "Sprache der wohlgeformten Klammern". Sie ist durch die folgenden drei Regeln festgelegt:

1. ( ) ist "wohlgeformt".
2. Ist *A* "wohlgeformt", so ist auch (*A*) "wohlgeformt".
3. Sind *A* und *B* "wohlgeformt", so ist *AB* "wohlgeformt".

Man überzeugt sich, dass die Ausdrücke ( ), ( )(( )), (( )( )) "wohlgeformt" sind, hingegen der Ausdruck (( ) nicht. Viele Computerprogramme weisen „nicht wohlgeformte“ Ausdrücke (in denen neben Klammern noch andere Zeichen vorkommen können) mit dem Vermerk *syntax error* zurück.

---

[1] So wird etwa die Fügung *ein schöner Hund* als korrekt, hingegen die Fügung **ein schönes Hund* als nicht korrekt angesehen.

Klassisch ist die rekursive Beschreibung der natürlichen Zahlen geworden:

1. α ist eine "natürliche Zahl".
2. Ist n eine "natürliche Zahl", so ist ihr „Nachfolger" n' eine "natürliche Zahl".
3. Für jedes n gilt $n \neq n'$.

Demnach sind die Ausdrücke α, α', α'', α''', ... natürliche Zahlen. [Genauer: Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste nichtleere Menge dieser Art. Zu diesem Thema siehe etwa GERICKE 1970.]

Für beide Beispiele lassen sich nun leicht Grammatiken angeben, d. h. ein System von Regeln, welches die gewünschten Ausdrücke (und nur diese!) erzeugt. Wir betrachten die Regeln $S \to (\,)$, $S \to (S)$, $S \to SS$ und vereinbaren: Ist ein Wort w schon erzeugt und enthält es das Hilfszeichen S, so darf eine der drei Regeln angewandt werden und man erhält so ein neues Wort v. Enthält v das Hilfszeichen S nicht, so stoppt der Prozess. Alle Wörter, die man so erzeugen kann, gehören zur "Sprache der wohlgeformten Klammern". Ein Beispiel veranschaulicht dies:

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((\,))S \Rightarrow ((\,))()$$

[$w \Rightarrow v$ bedeutet: v entsteht aus w durch Anwendung einer Regel].

Für natürliche Zahlen leistet das Regelsystem $S \Rightarrow S'$, $S \Rightarrow \alpha$ das Gewünschte.

Eine <u>generative Grammatik</u> G (Typ-0-Grammatik) wird wie folgt definiert: Gegeben seien zwei endliche Mengen, das Hilfsalphabet V und das Endalphabet Γ. Ferner sei eine endliche Menge von Regeln $x \to y$ gegeben, wo x und y Wörter sind, die mit den Zeichen $V \cup \Gamma$ geschrieben sind und überdies soll das Wort x mindestens ein Hilfszeichen $A \in V$ enthalten. Man sagt v ist (direkt) aus w abgeleitet und schreibt $v \Rightarrow$ w, wenn

$$v = w_1xw_2 \qquad w = w_1yw_2 \qquad x \to y$$

gilt, d. h. das Teilwort x wird durch die Anwendung der Regel $x \to y$ durch das Teilwort y ersetzt. Um beginnen zu können, wird ein Hilfszeichen als Startzeichen S ausgewählt. Ferner ist es manchmal praktisch das leere Wort λ zuzulassen. Die Regel $x \to \lambda$ bedeutet dann, dass x weggelassen wird.

Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ ist nun die Menge aller Wörter, die man in endlich vielen Schritten aus S ableiten kann. Einige Beispiele dazu!

Beispiel 1:

$V = \{S\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad S \to aSb,\ S \to ab, \quad L(G_1) = \{ab, a^2b^2, a^3b^3, ...\}.$

Beispiel 2:

$V = \{S\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad S \to aSa,\ S \to bSb, \quad L(G_2) = \{a, b, a^2, b^2, aba, bab, ...\}.$

$S \to a, S \to b, S \to \lambda,$

$L(G_2)$ ist die Menge aller "Palindrome" d. h. der Wörter, die vorwärts oder rückwärts gelesen, dasselbe Wort ergeben (wie z.B. *Anna*, *neben*, ...).

Beispiel 3 (etwas anspruchsvoller):

$V = \{S, \alpha, \beta\}, \qquad \Gamma = \{0, 1\}, \quad S \to 0\beta, S \to 1\alpha, \alpha \to 0, \alpha \to 0S,$

$\alpha \to 1\alpha\alpha, \beta \to 1, \beta \to 1S, \beta \to 0\beta\beta. \qquad L(G_3) = \{01;10;0011;0101;1001;1010;1100; ....\}.$

$L(G_3)$ ist die Menge aller binären Wörter, bei denen die Ziffer 0 und die Ziffer 1 gleich oft vorkommen!

Durch Festlegung der Form der verwendeten Regeln entstehen spezielle Klassen von Grammatiken. Die wichtigsten Klassen sind:

- Rechtslineare Grammatik (Typ-3-Grammatik):
  Jede Regel hat die Gestalt $A \to aB$, $A,B \in V$, $a \in \Gamma$ oder $A \to \lambda$, $A \in V$.
- Kontextfreie Grammatik (Typ-2-Grammatik):
  Jede Regel hat die Gestalt $A \to w$, $A \in V$, w ein Wort mit Zeichen aus $V \cup \Gamma$.
- Kontextsensitive Grammatik (Typ-1-Grammatik):

Jede Regel hat die Gestalt $xAy \to xwy$, $A \in V$, x,y,w Wörter mit Zeichen aus $V \cup \Gamma$. [Dabei darf w nicht das leere Wort sein. Es ist aber eine Regel $S \to \lambda$ erlaubt, wenn S in keiner Regel rechts vorkommt!].

Eine Sprache L heißt vom Typ-i, wenn es eine Grammatik G vom Typ-i gibt, welche L erzeugt, d. h. $L = L(G)$ gilt. Ein grundlegendes Ergebnis der Theorie der formalen Sprachen besagt, dass damit eine "echte Hierarchie" gegeben ist. Jede Sprache vom Typ-i ist auch vom Typ-(i–1), i = 1, 2 oder 3, aber es gibt stets Sprachen vom Typ-i, die nicht vom Typ-(i+1), i = 0, 1 oder 2 sind!

Wir wollen nun zeigen, wie man ein Fragment der lateinischen Morphologie durch eine Grammatik beschreiben kann. Als Beispiel diene die korrekte Erzeugung von Verbalformen, etwa der 1. und 3. Person Singular (Präsens, Indikativ, Aktiv).
Sei $V = \{S, Lx, P, 1s, 2s, 3s\}$ und $\Gamma = \{ama, dele, audi, leg, ...\} \cup \{o,i,s,t\}$. Die kontextfreien Regeln sind zunächst

$S \to LxP$, $P \to 1s$, $P \to 2s$, $P \to 3s$,
$Lx \to ama, dele, audi, leg,...$
(d. h. ein Stamm wird aus der Liste Γ ausgewählt)
$1s \to o$, $3s \to t$.

Dann leitet man korrekt ab

$S \Rightarrow LxP \Rightarrow dele\ P \Rightarrow dele\ 1s \Rightarrow deleo$ ’ich zerstöre’
$S \Rightarrow LxP \Rightarrow audi\ P \Rightarrow audi\ 3s \Rightarrow audit$ ‘er hört’

Aber die Ableitungen

$S \Rightarrow LxP \Rightarrow ama\ P \Rightarrow ama\ 1s \Rightarrow {}^*amao$ [statt *amo* \`ich liebe´] und
$S \Rightarrow LxP \Rightarrow leg\ P \Rightarrow leg\ 3s \Rightarrow {}^*legt$ [statt *legit* \`er liest´]

führen nicht auf die korrekten Formen. Hier helfen kontextsensitive Regeln. Statt $1s \to o$ nimmt man die Regeln

$a\ 1s \to o$, $e\ 1s \to eo$, $i\ 1s \to io$ bzw.
$C1s \to Co$ [wo C für einen Konsonanten steht];

statt $3s \to t$ nimmt man

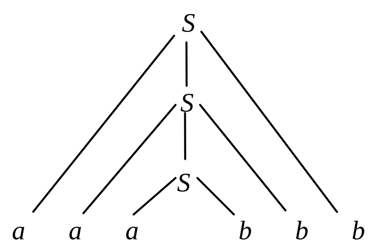
$V\,3s \to V\,t$ [wo V für einen Vokal steht] bzw.
$C\,3s \to C\,it$ [wo C für irgendeinen Konsonanten steht].

Dann erhält man korrekt

$S \Rightarrow LxP \Rightarrow leg\ P \Rightarrow leg\ 3s \Rightarrow legit$
$S \Rightarrow LxP \Rightarrow ama\ P \Rightarrow ama\ 1s \Rightarrow amo.$

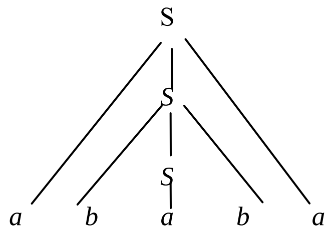
Man sieht schon an diesem Beispiel, wie relativ umfangreich eine solche Grammatik ist, um auch nur ein kleines Fragment korrekt darzustellen.

Eine Darstellung der Ableitungen mittels kontextfreier Grammatiken hat die neuere Grammatiktheorie besonders beeinflusst, nämlich der Strukturbaum. Betrachten wir etwa die Grammatik von Beispiel 1: $S \to aSb$, $S \to ab$.
Der Baum mit "Wurzel S" und "Blättern" $aaabbb = a^3b^3$ veranschaulicht eine Ableitung des Wortes a^3b^3 :



Oder zum Beispiel : $S \to aSa$, $S \to bSb$, $S \to a$, $S \to b$, $S \to \lambda$.

Der Baum mit "Wurzel" *S* und "Blättern" *ababa* sieht so aus:



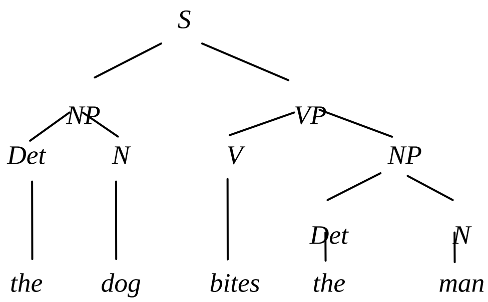
Obwohl diese „Bäume“ ein wenig an Weihnachtsbäume erinnern, ist die Vorstellung die, dass diese „Bäume“ aus der „Wurzel“ wachsen, aber entsprechend unseren Schreibgewohnheiten von oben nach unten. Man findet auch leicht Beispiele von Grammatiken, die zu einem Wort mehrere Bäume generieren. Für die Computerwissenschaft ist das Umkehrproblem ("parsing problem") wichtig: Es sei ein Wort *w* (geschrieben in Zeichen aus Γ) gegeben. Kann man einen Baum finden, dessen Blätter das Wort *w* darstellen (d. h. *w* wird von der gegebenen Grammatik erzeugt)? Dafür sind viele Algorithmen entwickelt worden (siehe etwa MOLL & ARBIB & KFOURY 1988).

Ohne auf formale Details einzugehen, sei auf Bäume hingewiesen, die der Erzeugung von Sätzen entsprechen. Wir nehmen die Regeln

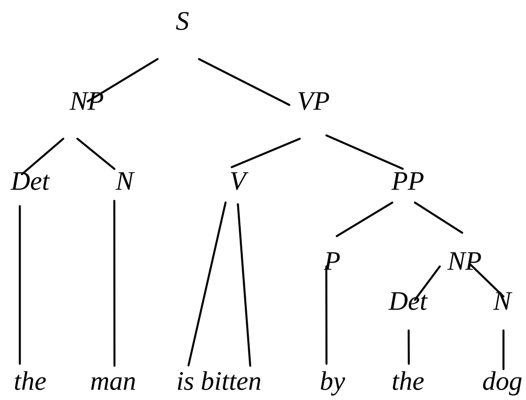
$S \rightarrow NP\ VP,\ NP \rightarrow Det\ N,\ VP \rightarrow V\ NP$

$Det \rightarrow the;\qquad N \rightarrow man, dog;\quad V \rightarrow bites, hits, kills, ...$

Dem Satz *The dog bites the man* entspricht der Baum



Man kann sich ausrechnen, wie kompliziert es wird, den entsprechenden deutschen Satz *Der Hund beißt den Mann* zu erzeugen. Man müsste dafür sorgen, dass der vom "Knoten" *VP* abgeleitete "Knoten" *NP* die Information Akkusativobjekt trägt, damit nicht der ungrammatische Satz **Der Hund beißt der Mann* generiert wird, sondern korrekt *Der Hund beißt den Mann*. Es ist gewiss kein Zufall, dass diese Form der Grammatiktheorie vor allem an der englischen Sprache (deren Morphologie relativ einfach ist) besonders ausgiebig entwickelt wurde! Die Transformationsgrammatik hat versucht, Sätze, die durch Umformung aus gegebenen Sätzen entstehen, durch *Transformationsregeln von Bäumen* herzuleiten. So geht der Satz *The man is bitten by the dog* durch eine "Passivtransformation" aus dem Satz *The dog bites the man* hervor:



Ähnlich gehen sogenannte *wh* - Fragen (also Fragesätze, die ein Fragewort enthalten, die im Englischen meist mit *wh* beginnen, wie *who* oder *what*), wie

Who bites the man?

Who does the dog bites?

durch Transformationen aus dem ursprünglichen Satz hervor. Es ist wichtig zusehen, dass diese Transformationen nicht nur Sätze sondern Strukturbäume verändern.

Aus mathematischer Sicht sind zwei Probleme zu nennen:

(1) Eine bloß formale Behandlung der Syntax gibt wenig Einsicht in die Struktur der zu beschreibenden Sprache. Unter den vielen möglichen formalen Modellen sind daher jene auszuwählen, die die beobachtbaren Daten gut beschreiben und zugleich der sprachlichen Intuition entgegenkommen. Daher hat man stets in der Benennung der Hilfszeichen, die als Namen der "Knoten" im Baum auftauchen, versucht, einen Zusammenhang mit der traditionellen Grammatik zu bewahren:

S ~ sentence
NP ~ noun phrase
VP ~ verb phrase
Det ~ determiner
N ~ noun
V ~ verb usw.

Die Wahl der Knoten geschieht mit der <u>Konstituentenanalyse</u> genannten Methode, die vor allem auf der Austauschprobe beruht. Im Satz *Der Hund beißt den Mann* kann die Phrase *beißt den Mann* etwa durch *bellt* oder *winselt vor Freude* ersetzt werden (und es entsteht ein akzeptabler Satz). Daher werden diese drei Satzteile *beißt den Mann, bellt, winselt vor Freude* (und viele andere Substitutionen sind denkbar) sinnvoll von einem Knoten (*VP*) abgeleitet. Warum wird aber nicht der Hund von diesem Knoten abgeleitet? Ganz einfach, weil man *der Hund* durch *die junge Hündin*, *der schlaue Pudel*, ... ersetzen kann und daher oberhalb des Knotens *VP* ein weiterer Knoten anzusetzen ist, von dem Verzweigungen zu den Knoten *NP* und *VP* führen. Innerhalb der Phrase *beißt den Mann* kann man den Mann *das Kind* oder *den Fuchs* usw. und *beißt* durch *beschnuppert* ersetzen. Daher hat man bei VP wieder eine Verzweigung, die zu einem Knoten *NP* und *V* führen.

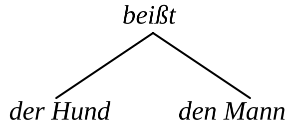
Eine weitere Hilfe in der Bestimmung von Konstituenten ist die Blockade von Einfügungen. In der Regel können im Deutschen Konstituenten nicht durch das Einfügen von Adverbien oder Negationen getrennt werden: *Dieser Dozent arbeitet an der Universität. Dieser Dozent arbeitet schon an der Universität *Dieser schon Dozent arbeitet an der Universität. *Dieser Dozent arbeitet an schon der Universität. Dieser Dozent arbeitet nicht an der Universität. *Dieser nicht Dozent arbeitet an der Universität. *Dieser Dozent arbeitet an der nicht Universität.* Aus diesen Beispielen kann man ablesen, dass die Syntagmen *dieser Dozent* und *an der Universität* als Konstituenten aufgefasst werden können.

Lateinlehrer werden zu Recht gegen diese Kriterien gewisse Bedenken haben, denn im Lateinischen stehen zusammengehörige Wörter oft nicht in einer Wortgruppe zusammen, wie etwa in dem bekannten Satz aus Ovids Metamorphosen: *In nova fert animus mutatas dicere formas corpora.* Hier hilft die lateinische Morpholgie etwas weiter. *In nova corpora* und *mutatas formas* gehören zusammen.

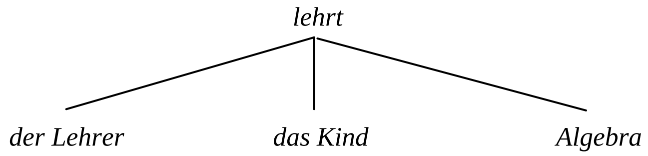
(2) Ferner haben fast alle Grammatiken eine "Überkapazität", d. h. sie erzeugen meist auch unerwünschte (unakzeptable) Sätze! Diese Probleme haben zur Entwicklung neuerer Varianten einer Grammatiktheorie geführt, die auf der Theorie generativer Grammatiken aufbaut. Die "*government and binding*" - Theorie ist, auf CHOMSKY 1981 zurückgehend, sehr bekannt geworden, aber vielleicht inzwischen schon wieder überholt.

Von den vielen anderen Grammatikmodellen ist die <u>Dependenzgrammatik</u> , die mit dem Namen von *Lucien Tesnière* verbunden ist, zu erwähnen. Ein Satz wird beschrieben als eine Konfiguration von Kernen (Nuklei), die durch Konnexionen verbunden sind

Als oberster Knoten (Nexus) des Satzes wird das Verbum angesehen. Jedes Verbum bestimmt mehrere Aktanten (frz. *actants*), etwa Subjekt, Objekt und weitere Objekte. Dazu können noch Umstände (frz. *circonstants*) hinzutreten. Die Struktur des Satzes *Der Hund beißt den Mann* kann vereinfacht durch den Baum



dargestellt werden. Hier kommt zum Ausdruck, dass vom Verbum *beißen* (als transitives Verbum) zwei Aktanten abhängen, das handelnde Subjekt und das von der Handlung betroffene Objekt. Dies entspricht der Auffassung, dass das transitive Verbum *beißen* die „Valenz“ 2 hat. Ein Verbum mit „Valenz“ 3, wie etwa *lehren*, gibt Anlaß zu einem Baum der Form



Im Modell von *Government-and-Binding* weist ein Verbum sogenannte thematische Rollen (kurz θ-Rollen genannt, wie Agens, Patiens, Ziel, ...) zu, die in etwa den Aktanten der Dependenztheorie entsprechen.

In gewissem Sinn dual zur Theorie der generativen Grammatiken ist die Theorie der Automaten. Werden durch eine generative Grammatik Wörter einer Sprache *erzeugt*, so werden durch einen Automaten Wörter einer Sprache *akzeptiert*. Es sei dafür nur ein einfaches Beispiel gegeben, nämlich ein endlicher deterministischer Automat M. Dieser Automat M hat ein Eingabealphabet Γ und ein Hilfsalphabet Q (dessen Elemente „Zustände“ genannt werden). Es gibt einen „ausgezeichneten“ Zustand q_0 („Anfangszustand“) und eine Menge „ausgezeichneter“ Zustände $F \subseteq Q$, die „Endzustände“ heißen. Ferner gibt es eine Abbildung δ: $Q \times \Gamma \to Q$, die den Lesevorgang regelt. Dieser geht wie folgt vor sich: Sei $w = a_1a_2 \ldots a_n$ ein Wort, geschrieben in Zeichen $a_j \in \Gamma$, $1 \le j \le n$, dann startet der Automat im Zustand q_0 und „liest“ a_1. Wenn $\delta(q_0,a_1) = q_1$ gilt, so bedeutet das: Der Automat „liest“ a_1 und geht in den Zustand q_1 über. Sodann „liest“ der Automat das Zeichen a_2 und gemäß $\delta(q_1,a_2) = q_2$ ist der Automat nun im Zustand q_2. Nach n Schritten wurde a_n „gelesen“ und der Automat ist im Zustand q_n. Ist q_n ein „Endzustand“, so wird das Wort akzeptiert; ist q_n kein „Endzustand“, so wird das Wort als nicht zur Sprache $L(M)$ gehörig zurückgewiesen. Beispiel:

$Q = \{q_0,q_1\}$, $F = \{q_0\}$, $\Gamma = \{0,1\}$, δ ist gemäß der Tabelle definiert:

δ	0	1
q_0	q_1	q_1
q_1	q_1	q_0

Wir „lesen“ das Wort 1001: $\delta(q_0,1) = q_1$, $\delta(q_1,0) = q_1$, $\delta(q_1,0) = q_1$, $\delta(q_1,1) = q_0$

Also wird 1001 akzeptiert.

Wir „lesen“ das Wort 1010: $\delta(q_0,1) = q_1$, $\delta(q_1,0) = q_1$, $\delta(q_1,1) = q_0$, $\delta(q_0,0) = q_1$

Da q_1 kein „Endzustand“ ist, wird 1010 nicht akzeptiert.

Es gibt eine hübsche Darstellung endlicher Automaten durch (gerichtete, benannte) Graphen, auf die wir aber nicht eingehen. Als ein typisches Resultat der Automatentheorie zitieren wir: Eine Sprache L ist Typ-3 genau dann, wenn es einen endlichen deterministischen Automaten gibt, der L akzeptiert.

Anhang 4: Lesbarkeit von Texten - Lesefähigkeit - Textverstehen

Nachfolgend wird eine Reihe von Untersuchungen vorgestellt, die den Themenkomplex Lesbarkeit von Texten, Lesefähigkeit von Schülern und Verstehen von Texten betreffen. Dabei liegt der Schwerpunkt bei der Auswahl der Befunde auf dem Lesen und Verstehen mathematischer Lehr- und Aufgabentexte.

a) Lesbarkeit von Texten

In ihrer allgemeinen Form ist die Frage der Lesbarkeit bzw. der Verständlichkeit von Texten ein Thema der Linguistik. Dabei werden Merkmale von Texten untersucht, die deren verstehendes Lesen beeinflussen, also fördern bzw. hemmen können (siehe z. B. TEIGELER 1968, MRAZCK 1979, FRÜH 1980).

Nach GROEBEN (1982), der die Verständlichkeitsforschungen der früheren 70er Jahre zusammenfassend darstellt, darf man davon ausgehen, dass das Verstehen von Texten, soweit es von diesen selbst abhängt, in erster Linie von ihrer inhaltlich-kognitiven Strukturierung bestimmt ist. Darüber hinaus spielen aber auch formal-stilistische Merkmale eine nicht unbeträchtliche Rolle. Hier werden genannt:

- Die grammatikalisch-stilistische Einfachheit: kurze Satzteile, aktiv gebrauchte Verben, Vermeidung von Negationen und Nominalisierungen und sparsamer Gebrauch von Nebensätzen und Infinitivgruppen;
- eine mittlere semantische Dichte: einerseits keine Weitschweifigkeit, besonders keine synonyme oder wörtliche Wiederholung von Satzgliedern mit wichtiger Bedeutung, aber auch keine allzu große Prägnanz, also kein Verzicht auf jegliche Redundanz.

MERZYN (1987) ist mit Blick auf Texte in Schulbüchern zum Fach Physik sogar überzeugt, dass sich aus Variablen wie Satzlänge, Komplexität des Satzbaus, Häufigkeit fremdartiger Wörter und Abstrakta sowie substantivistischer Stil für jeden Text ein altersspezifischer Lesbarkeitswert errechnen lässt. ORTON (1987) hingegen, der sich speziell für die Lesbarkeit von mathematischen Texten interessiert, hält Lesbarkeitsformeln auf diese für nicht anwendbar. Er prüfte folgende Formeln:

- Die Formel 'Dale-Chall', welche die Lesbarkeit aufgrund des Prozentsatzes von Wörtern definiert, die nicht in einer Liste gängiger Bezeichnungen enthalten sind und auch die durchschnittliche Wortzahl pro Satz einbezieht;
- die Formel 'Fog', die sich nur auf die durchschnittliche Wortzahl pro Satz und die durchschnittliche Zahl drei- oder mehrsilbiger Wörter stützt;
- ein Verfahren, das sich auf die Fähigkeit des Lesers gründet, aus einem Text entfernte Wörter zu ersetzen.

Alle diese Messmethoden hält ORTON zunächst jeweils nur in bestimmten Gegenden der Welt für anwendbar. Eine für die amerikanische Sprache entwickelte Formel dürfte seiner Meinung nach nicht einmal in Großbritannien verwendet werden. Vor allem aber trügen diese Formeln der Komplexität mathematischer Texte zu wenig Rechnung. Eine von KANE u. a. (1974) für mathematische Texte entwickelte Lesbarkeitsformel, die dies versuchte, sei dann selbst so komplex, dass sie kaum sinnvoll anwendbar erscheint.

WOODROW (1982) beschäftigt sich speziell mit der Frage, was der hohe Anteil an Symbolen in der mathematischen Sprache für deren Gebrauch durch Schüler im Mathematikunterricht bedeutet. Zunächst weist er darauf hin, dass die in der alltäglichen Sprache festzustellende Redundanz in dieser nicht zu beobachten sei. Die relevante und differenzierende Information befinde sich innerhalb des Symbolismus, der gelesen werden muss und nicht nur „angeschaut werden" darf. Während Buchstaben in der Alltagssprache keine individuellen Bedeutungsträger sind, kann in der mathematischen Sprache jedes Zeichen eine spezifische Bedeutung haben. Außerdem ist die wechselseitige Beziehung zwischen den Symbolen im Fall mathematischer Texte geringer, obwohl auch sie mit benachbarten Symbolen verknüpft und auf Schemata bezogen sein können.

WOODROW unterscheidet zwischen Symbolen und Zeichen; letztere weisen keine Abhängigkeit zu benachbarten Zeichen auf. Beispiele von Zeichen sind etwa Quadrate oder Kreise anstelle von Variablen in Gleichungen. Sie sind ausschließlich Platzhalter für fehlende Zahlen, die man im wörtlichen Sinn in diese einsetzen kann, während durch Buchstaben ausgedrückte Variablen eine Ersetzung durch (verschiedene) Zahlen verlangen. Sie bringen zum Ausdruck, dass dieses spezielle Beispiel zu einer ganzen Klasse von Ausdrücken gehört, die in dieser oder jener Weise gebraucht werden können.

Empirisch setzt sich RASOLOFONIAINA (1983) mit dem Problem der Lesbarkeit mathematischer Lehrtexte auseinander. Sie bat 17jährige Oberstufenschüler, eine vorgelegte Variante eines Basistextes zum Thema 'Kongruenzrelationen in Z' genau zu lesen und zu verstehen versuchen, nach der Lektüre, für die eine halbe Stunde vorgesehen war, alles aufzuschreiben, was sie sich vom Text gemerkt hatten, und sieben auf den Text bezogene Aufgaben zu lösen. Die Textvarianten waren bestimmt

- durch eine mehr formal-symbolische oder eine mehr von (Alltags-)Wörtern bestimmte Sprache (Sprachtypus),
- durch eine mehr statische (Wiedergabe in endgültiger Form) oder eine mehr dynamische Darstellung (Aufforderung an den Leser zu Aktivität),
- durch Art und Grad der Anreicherung mit Beispielen und Erläuterungen und
- durch die graphische (redaktionelle) Gestaltung des Textes.

Neben diesen internen Textvariationen gab es auch externe Variationen im Kontext, je nachdem ob das präsentierte Wissen

- abgetrennt von Problemen oder möglichen Anwendungen dargestellt,
- durch einen Einführungstext motiviert oder
- anschließend in teilweise gelösten Aufgaben anzuwenden war.

Es zeigte sich, dass der Bearbeitungserfolg der Schüler hinsichtlich der externen Variationen nur durch Anwendung, vor allem in teilweise gelösten Aufgaben gesteigert werden konnte. Die Aufnahme eines Einführungsproblems in den Text wirkte nur in Verbindung mit der Anwendung positiv. Für sich allein bewirkte es, sogar gegenüber der bloß isolierten Darstellung, eine deutliche Verschlechterung der Leistungen. Dies dürfte vor allem darauf zurückzuführen sein, dass die Einführung den zu lesenden Text deutlich verlängert und die Schüler auf eine falsche Lesehaltung einstellt. Die Schüler machten bei dieser Variante zwar nicht mehr Fehler, sie ließen aber vieles aus. Die Anreicherung des Basistexts durch Beispiele, Kommentare oder beides erbrachte nicht die erwartete Leistungsverbesserung. Auch die übrigen internen Variationen zeigten keine nennenswerten Wirkungen.

Mit einer ähnlichen Forschungsmethode untersuchte LABORDE (1991) den Einfluss der Textgestalt auf das verstehende Lesen mathematischer Lehrtexte durch 14- bis 15-jährige Schüler. Die Versuchspersonen erhielten vier verschiedene Lehrbuchtexte zum Thema „Rechnen mit Quadratwurzeln", die sich in folgenden Merkmalen voneinander unterschieden:

- Verwendung von Diagrammen, Schemata, Tabellen (sie werden nur in einem der Texte benutzt);
- Wahl der Sprache, in der die Sätze über die Eigenschaften der Quadratwurzeln formuliert sind: Alltagssprache, Symbolsprache, gemischte Verwendung beider Kodes;
- Aufnahme eines Beweises für die Eigenschaften der Quadratwurzeln in den Text (nur ein Lehrbuchtext enthält keinerlei Beweise);
- Art der Objekte, mit denen der Beweis geführt wird: bestimmte Zahlen oder Variablen oder beides;
- Gewicht von Beispielen nach Umfang und Platzierung und
- Vorhandensein von Übungen, sei es zur Anwendung, sei es zur Einführung in eine Eigenschaft.

Die Schüler sollten nach intensiver Lektüre der vier Texte in Partnerarbeit einen weiteren Text (gleichen Inhalts) entwerfen. Dieser sollte für gleichaltrige Schüler bestimmt sein, denen das Rechnen mit Quadratwurzeln nicht bekannt war, und die mit seiner Hilfe in der Lage sein sollten, dies zu erlernen.

Die damit gestellte Aufgabe erweist sich als ziemlich komplex. Schon die Lektüre der Texte verlangt von den Schülern eine Konstruktion der globalen Bedeutung jedes einzelnen Textes (Welches ist sein eigentliches The-

ma?), eine Strukturierung dieses Themas in Unterthemen und eine lokale Interpretation der Entwicklung jedes dieser einzelnen Unterthemen. Dann mussten sie eine Kohärenz zwischen den vier Texten herstellen und dabei von ihrer unterschiedlichen Gestaltung und Organisation absehen. Um die Beweise zu verstehen, war der zentrale Beweisgedanke zu erfassen und die logische Ordnung der Sätze zu rekonstruieren, die den Beweis ausmacht; es galt, jeden einzelnen Satz zu verstehen und eventuelle Beweislücken zu schließen. Schließlich musste es den Schülern gelingen, die Beispiele und Übungen sinnvoll in den Gesamtzusammenhang einzuordnen und mit der Vermischung von Alltagssprache und mathematischer Symbolsprache zu Recht zu kommen.
Zur Auswertung standen die Tonbandaufzeichnungen der Schülergespräche bei der Textproduktion und die von den Schülerpaaren produzierten Texte selbst zur Verfügung. Gesichtspunkt der Auswertung war die Frage, von welchem der vier Lehrbuchtexte sich die Schülerpaare bei der gemeinsamen Formulierung ihres eigenen Textes inspirieren ließen, und in welcher Form dies geschah.
Im ersten Auswertungsschritt interessierte sich LABORDE für jene Texte bzw. Textpassagen, die die Schüler bei ihrer eigenen Textproduktion hauptsächlich leiteten bzw. aus denen sie Gedanken entlehnten. Dem lag die Hypothese zu Grunde, dass dies zugleich jene Passagen sind, deren Lektüre den Schülern am leichtesten fiel, die sie am besten verstanden zu haben glaubten, und die ihnen daher auch am meisten helfen könnten, ihren eigenen Lehrtext zu formulieren. Im Ergebnis waren das dann jene zwei Lehrbuchtexte, die eine quasi lineare makrostrukturelle Stofforganisation aufwiesen, begleitet von einer klaren Seitenaufteilung und einer übersichtlichen Typographie. Diese Textmerkmale waren es auch, welche den inhaltlichen Aufbau der Schüler stark beeinflussten. Bei der Darstellung der Einzelinhalte griffen nur zwei von zwölf Schülerpaaren auf alle vier Texte zurück; andererseits beschränkte sich auch nur ein Schülerpaar auf einen einzigen Text. Die meisten Paare ließen sich von zwei oder drei der vorgegebenen Texte inspirieren. Favorisiert wurden dabei die beiden Texte, in denen das Wissen streng geordnet in fachlicher Symbolsprache entwickelt, in Merksätzen zusammengefasst, anschließend mit Beispielen illustriert und in Übungen anzuwenden war, die jedoch auf Beweise verzichteten.
Da die Schüler beim Rückgriff auf die Texte durchaus Veränderungen und Umformulierungen vornahmen und nicht einfach Textteile wörtlich entlehnten, durfte man ein relativ gutes Verstehen durch die Schüler unterstellen. Dabei konnten sie wohl durchaus auf einführende Beispiele verzichten. Freilich wurden manche Einzeldarstellungen auch wörtlich entnommen, was die Frage eines effektiven Verständnisses eher offen ließ. Zwar präsentierten zehn der zwölf Texte Beispiele, in denen die Eigenschaften der Quadratwurzeln exemplifiziert waren; sie folgten damit dem Vorbild jener beiden Texte, die Beispiele unmittelbar an die Aussagen anschlossen und nicht am Ende für alle Aussagen zusammenfassten. Jedoch fügten nur fünf Schülerpaare Übungen in ihren Text ein. Zwei stellten eigene Übungen zusammen, die anderen drei entnahmen sie einem der beiden anderen Texte.
Fehlerhafte Abweichungen von den Vorbildtexten gab es vor allem im Bereich der Beweise, wo z. B. das Quadrat eines Produkts zweier Quadratwurzeln in das Quadrat einer Summe zweier Quadratwurzeln umgeformt wurde. Auch bei der Interpretation von Übungen gab es Schwierigkeiten. Was die Verwendung der beiden Sprachkodes (Alltagssprache und mathematische Symbolsprache) betrifft, machten die Schüler in ihren eigenen Texten oft noch intensiver von der Symbolsprache Gebrauch als die Schulbuchtexte selbst. Zwar verwendeten sie auch Alltagssprache, aber diese war doch recht intensiv mit Symbolsprache durchsetzt. Am wenigstens zogen die Schüler jedenfalls jenen der vier Texte als Grundlage für ihre eigene Textgestaltung heran, der am meisten von der üblichen linearen Anordnung abwich und mit einem hohen Anteil an Alltagssprache eine originelle Darstellung des Wissens versuchte.

Theoretische Überlegungen zur Lesbarkeit mathematischer Texte stellt OTTE (1983 und 1986) an. In der Schulmathematik werden üblicherweise zwei spezifische Repräsentationssysteme gebraucht, das arithmetische (mit den natürlichen Zahlen als „absoluten Referenzpunkten“) und das geometrische (Visualisieren in der Ebene und im Raum). Beide sind wesentlich. Insbesondere kommt die Algebra ohne graphische Visualisation nicht aus. Und dass der algebraische Charakter der traditionellen Schulmathematik so viele Schwierigkeiten bereitet, ist auf das ungenügende Bewusstsein von der Kraft visueller graphischer Systeme und der mit ihnen verbundenen Modellbegriffe zurückzuführen. Insbesondere die Variablen haben einen doppelten Ursprung, einerseits einen verbal-numerischen und andererseits einen geometrisch-graphischen. Beide sollten in algebraischen Darstellungen und Argumentationen zum Ausdruck kommen. Jede wirkliche objektbezogene Generalisation wird immer auf Visualisation gestützt sein, auf Bewegungen in einem strukturierten Raum. Man denke an die Entwicklung der irrationalen Zahlen durch *Gauss* mit Hilfe der geometrischen Metapher einer komplexen Ebene. Die geometrische Repräsentation der komplexen Zahlen kann als Erfolg der Suche nach einer intrinsischen geometrischen Analyse aufgrund des Unbehagens mit einigen analytischen Methoden gesehen werden. Die Grundsätze dieser Darstellung entsprangen nicht direkt der Suche nach einer geometrischen Analyse, sondern dem Bestreben, den Gebrauch von Zahlen zu legitimieren, der von den Mathematikern zunächst als der mathematischen Wirklichkeit nicht angemessen zurückgewiesen wurde.

Man muss in Betracht ziehen, dass eine Formel wie z. B. die für den Flächeninhalt des Dreiecks sowohl einen rechnerischen Algorithmus, eine Prozedur fixiert, als auch ein Modell darstellt, das bestimmte wichtige Beziehungen abbildet. Die Auffassung der Formel als Modell führt zu vielversprechenden heuristischen Methoden: zur Betrachtung von Symmetrien, von Fragen der Dimensionalität, zu metaphorischen Transpositionen, mathematischen Verallgemeinerungen, usw. „Only if a formula is considered under both aspects, the procedural and the structural, the algorithmic and the ideographic, the operative and the descriptive, can it be understood and used to develop knowledge“ (1986, S. 182).

Die verschiedenen Aspekte können begleitend verbal oder in einer zeichnerischen Darstellung bzw. einem Diagramm zum Ausdruck gebracht werden. Man kann von zwei Kodes ausgehen, die mit der linear zeitlichen Ordnung von Prozessen bzw. mit der simultanen Multidimensionalität der ideographischen Visualisation verbunden sind. Bedeutung kann nicht auf absolute, objektive Weise fixiert werden, sondern muss alle Dimensionen kognitiver Aktivität und sozialer Interaktion, sogar die Stellung der Mathematik in unserer Gesellschaft, integrieren. Die als komplimentär betrachtete algorithmische bzw. ideographische Visualisation verlangt, dass Formeln auch visuell-graphisch repräsentiert werden. In manchen Lehrbuchdarstellungen sind allerdings graphische Elemente und verbale Textteile nicht aufeinander bezogen. Es bleibt den Schülern überlassen, relevante Bezüge herzustellen. Gleichwohl sollte jeder Text enaktive Elemente enthalten. „The enactive element fulfils the same function as visualization has, that is the function of fixing stages of a goal-oriented process, thus developing the letter“ (S. 187).

Ebenfalls auf Grund theoretischer Überlegung formuliert DORMOLEN (1986) vier Anforderungen an einen mathematischen Text, die er aus fachlicher Sicht seiner Meinung nach erfüllen müsste. Zum ersten hat er frei von Fehlern zu sein, d. h. er darf keine Unrichtigkeiten enthalten, die durch einfache Veränderung einer Zahl, eines Zeichens oder eines Satzteils behoben werden können. Zum zweiten sollte er konsistent sein, d. h. keine Aussagen enthalten, die mit anderen Aussagen des Texts im Widerspruch stehen. Die weitere Forderung nach Klarheit meint, dass der Text im Geist des Lesers eine kognitive Struktur weckt, die mit dem vom Autor gemeinten Kontext übereinstimmt. Zum vierten sollte er genuin sein, d. h. einen deutlichen Zusammenhang herstellen zwischen Problemsituationen und zentralen Ideen auf der einen Seite und verschiedenen Aspekten der Mathematik auf der anderen Seite.

Der Text muss den Fähigkeiten der Leser (Schüler) angemessen sein, damit er bei ihnen Lernprozesse anzuregen und ihr Lernen zu führen vermag. Vor allem sollte die verwendete Sprache dem Verstehensvermögen der Schüler angemessen sein. Zeichen können kognitive Strukturen aktivieren, indem sie Begriffe wachrufen (Symboleffekt) oder zum Handeln stimulieren (Signaleffekt). Die Verbindung der verbalen mit visuellen Elementen kann für den Leser eine wertvolle Hilfe sein.

b) *Lesefähigkeit und Lesehaltung*

Lesbarkeit wurde oben aufgefasst als eine Eigenschaft von Texten, die etwas über die Möglichkeit ihres Verstehens durch Lesende aussagt. Es scheint jedoch evident, dass dieses Verstehen nicht allein vom Text selbst und seiner sprachlichen Gestalt abhängen kann. Ein mindestens ebenso wichtiger Faktor ist der Leser selbst. Es geht also auch um die Frage, welche Faktoren auf Seiten des Lesers das Verstehen von Texten beeinflussen. Sie ist Forschungsthema der Psycholinguistik (siehe z. B. BÜHLER 1965, KAINZ 1964). Eine Grundlage des Textverstehens ist die Lesefähigkeit, für die GROEBEN (1982), aufgrund empirischer Prüfung bei Schülern, eine Klassifikation nach vier Niveaustufen vorschlägt:

- Selbständiges Lesen mit einer Verständnisrate von mehr als 90 % – d. h. 90 % der im Text vorkommenden Sachinhalte werden korrekt aufgefasst – liefert sehr gute Voraussetzungen für das Textverstehen.
- Strukturell vorhandene Lesefähigkeit bringt mit mehr als 75 % noch eine befriedigende Verstehensrate.
- Bei einer noch unterrichtsbefähigenden Lesefähigkeit, ist die Verständnisrate auf etwa 50 % beschränkt; sie bringt bei jedem 14. Wort einen Wahrnehmungsfehler hervor.
- Die frustrierende Lesefähigkeit drückt die Verständnisrate auf bis zu 20 %, so dass praktisch kein zusammenhängendes Verstehen mehr festzustellen ist.

OTTE (1983 und 1986) ordnet seine Ausführungen über das Lesen mathematische Lehrtexte in ein Schema der Interaktion zwischen Leser und Text ein, das sich auf den von *Neisser* (1976) entwickelten kognitiven Zyklus bezieht. Danach ist Lesen ein „Sammelbegriff für viele kognitive Aktivitäten, die zwischen Leser und Text vermitteln. Die Leseaktivitäten werden durch Schemata, d. h. Vorwissen und Zielsetzungen gesteuert. Der Text bildet ein Wissensangebot, aus dem der Leser mittels der Leseraktivitäten auswählt oder das er im Hinblick auf seine Ziele umorganisiert. Das so aus dem Text aufgenommene Wissen führt dabei zu einer Veränderung der vorhandenen Schemata“ (1983, S. 183). Das Lesen und Interpretieren von Texten, z. B. in mathematischen Lehrbüchern, automatisiere sich nicht in gleicher Weise wie Atmen, Laufen oder Sehen. Vielmehr stellt die Interaktion zwischen dem Leser mit seinen subjektiven Schemata und dem Text als einer objektiv gegebenen Informationsstruktur ein ständiges Problem dar, das nicht ein für alle mal gelöst werden kann.

MACGREGOR (1990) und MUNRO (1990) stellen einen eingehenden Vergleich an zwischen dem Lesen von alltäglichen und von mathematischen Texten. Ihren Beobachtungen zufolge bildet sich im Alltag die Gewohnheit heraus, Texte nicht Wort für Wort zu lesen, sondern bei jedem Satz nach wenigen Worten Hypothesen über den nachfolgenden Teil zu generieren, die dann nur noch ‘stichprobenartig’ überprüft werden. Lediglich in zwingenden Fällen sehen die Lesenden Anlass, die gebildeten Hypothesen zu revidieren.

Eine solche Gewohnheit erweist sich bei alltäglichen Texten aus zwei Gründen als „unschädlich“: Zum einen werden hier zumeist viele Wörter verwendet, um relativ wenig zu sagen (Redundanz), so dass es nicht auf die Wahrnehmung eines jeden einzelnen Wortes ankommt; zum zweiten können Schüler in die Lektüre ein aufgrund von Alltagserfahrungen verfügbares Sachwissen einbringen, das ihnen beim raschen Erfassen des Textes hilft. Beides trifft auf mathematische Texte oftmals nicht zu. Falls hier, wie so oft, verfügbares fachliches Vorwissen fehlt, kann der Leser nicht schon nach wenigen Worten Hypothesen über den Inhalt nachfolgender Textteile bilden. In Fällen, wo die fachliche Bedeutung einiger Ausdrücke von der alltäglichen abweicht, kann das Beiziehen solchen Erfahrungswissens sogar nachteilig bis sinnentstellend sein. Da bei mathematischen Texten die Regel gilt, mit möglichst wenigen sprachlichen Mitteln möglichst viel auszudrücken (Prägnanz), zwingt die dadurch gegebene Informationsdichte in diesem Fall dazu, Wort für Wort zu lesen, um den Sinn vollständig zu erfassen.

Des Weiteren wird beim Lesen alltäglicher Texte die Sinnerfassung bzw. das Verstehen durch ein intuitives syntaktisches Wissen beschleunigt. Der Lesende braucht hier nicht „genau“ zu lesen in dem Sinn, dass er jeden einzelnen Buchstaben und jedes Wort beachten müsste. Selbst wenn er mehrere Buchstaben und Wörter „übersieht“, erhält er immer noch hinreichend viel Information, um den Sinn des gesamten Textes erfassen zu können.

Sicherlich gibt es auch für mathematische Texte ein syntaktisches Wissen; dieses unterscheidet sich allerdings von dem des Alltags durch andere „grammatikalische Regeln" und höhere Komplexität und ist daher den Schülern nicht immer verfügbar. GROEBEN (1982) weist darauf hin, dass vor allem bei stark von Symbolen durchsetzten mathematischen Texten schon kleinen Verschiedenheiten relativ große Bedeutungsänderungen entsprechen können. Hier sei daher die verbreitete Lesegewohnheit aufzugeben, den Text in rascher Augenbewegung zeilenweise linear von links nach rechts abzuarbeiten. Vielmehr gelte es, jedes einzelne Zeichen präzise zu erfassen und auch abweichende Leserichtungen zu beachten. Einige fachliche Symbole sind sogar flächenhaft aufzufassen und daher in einer speziellen Ordnung zu lesen.

Genaues Lesen ist nach Meinung von MACGREGOR (1990) und MUNRO (1990) bei mathematischen Texten auch noch aus einem anderen Grund nötig. Während in der Alltagssprache der Verfasser oftmals nicht genau sagt, was er meint, und auch nicht genau das meint, was er schriftlich ausdrückt (Ungenauigkeit), ist der Leser daran gewöhnt und hier meist auch in der Lage, eine Differenz zwischen „objektivem" Bedeutungsgehalt des Textes und subjektiv intendierter Bedeutung aufgrund von Kontextwissen „zu korrigieren". In der mathematischen Fachsprache, wo eine solche Differenz nach Möglichkeit vermieden wird, ist der Leser dazu gezwungen, das Geschriebene „wörtlich" zu nehmen; er muss sich des beschränkten Interpretationsspielraums bewusst sein, der in bei solchen Texten zur Verfügung steht.

Auch ORTON (1987) zufolge kommt es beim Lesen mathematischer Texte vor allem auf langsames Abarbeiten an, denn jedes einzelne Wort kann entscheidend und jedes Symbol wesentlich für das Sinnverständnis sein. Die wechselseitigen Bezüge innerhalb des Texts machen es notwendig, sich auf alle Textteile zu beziehen. Wichtig erscheint eine interaktive Auseinandersetzung mit den einzelnen Textteilen. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn der Text auf Graphiken, Tabellen oder Diagramme Bezug nimmt, die ihn ihrerseits strukturieren. Der Schüler muss die im Text vorfindbaren Impulse aufnehmen, die ihn zu einer aktiven Auseinandersetzung anregen. Der Fluss der Bedeutungen verlangt eine detaillierte Analyse um die wichtigen und nützlichen Informationen aufzufinden.

c) Verstehen mathematischer Texte

GROEBEN (1982) kristallisiert dann auf der Grundlage verschiedener Modelle (z.B. von *Spache* 1974, *Davis* 1972 und *Sperrit* 1972) vier Teilfähigkeiten heraus, die für das Verstehen eines Textes bedeutsam sind:

- die Kenntnis von Wortbedeutungen,
- sinnerfassende Schlussfolgerungen innerhalb des Lesens,
- Nachvollzug der Textstruktur und Textgliederung und
- Identifizierung der Textintention.

Die Kenntnis von Wortbedeutungen bezieht sich auf die Wort- und Satzebene. Im Satzzusammenhang konstruiert der Leser aktiv Bedeutungseinheiten, sogenannte Propositionen. Kognitiv-aktiv organisierte semantische Merkmale ermöglichen die Unterscheidung von Worten und Wortgruppen gegenüber anderen; sie sind für eine angemessene Analyse und Synthese im Verstehensprozess unabdingbar. Die semantische Erschließung von Wörtern und Sätzen ist reduktiv, wenn nur einzelne Merkmale aus der Merkmalsmenge des Wortmaterials ausgewählt werden; sie ist elaborativ, wenn der einzelne Leser neue Bedeutungen, Beziehungen und Aspekte hinzufügt.

Sinnvoll werden neue Informationen freilich erst dadurch, dass sie zu vorhandenem Wissen in Beziehung gesetzt werden. Dies ist der Inhalt der zweiten Teilfähigkeit, so dass es naheliegt, Textverstehen als einen semantisch-konstruktiven Integrations- und FolgerungsProzess aufzufassen. Beim Nachvollzug der Textstruktur und Textgliederung wird der Text hierarchisch sequentiell in mehrere Ebenen zerlegt und so strukturell organisiert. Es geht hier insbesondere auch um die Entwicklung globaler Bedeutungseinheiten (sogenannter Makrostrukturen bzw. Makropropositionen), die sich durch Auslassen, Auswählen, Generalisieren und Integrieren herausbilden.

Zugleich ist die vergleichende Einbettung sprachlicher Aussagen bzw. Bedeutungen in den individuellen Wissenskontext des Lesers die Grundlage für die vierte Teilfähigkeit des Textverstehens, nämlich das Erkennen der Intention des Textverfassers. Der Leser fragt in diesem letzten aktiven Schritt der Sinnerschließung nach den Beziehungen des Textes zu eigenen Realitätserfahrungen.

Auch OTTE (1983 und 1986) weist beim Verstehen von Texten dem Kontext eine entscheidende Rolle zu. Denn Wörter und Texte haben außerhalb des Kontexts, indem sie formuliert werden, keine Bedeutung. Der Kontext wird durch die zielgerichtete Aktivität des Lesers geschaffen. Dabei handelt es sich nicht um einen unstrukturierten Vorgang, sondern um ein System, das sich auf eine Hierarchie von Mitteln gründet, Werkzeuge, Modelle, Symbolsysteme, usw.), und das durch antizipatorische Schemata geformt wird. Aus komplementaristischer Sicht, die Texte gleichermaßen als objektive Wissensstruktur und in ihrer kognitiven und kommunikativen Funktion betrachtet, kann vor allem dreierlei gesagt werden: Texte enthalten nicht die ganze Wirklichkeit, ihre Erschließung muss von Aktivitäten begleitet werden, und sie stellen eine Beziehung zwischen dem Wissen und seiner Repräsentation her.

GROEBEN (1982) zufolge verändern sich die oben genannten Voraussetzungen für das Textverstehen oder sie bedürfen der Ergänzung, sobald es sich nicht um alltagssprachliche, sondern um mathematische Texte handelt. Hier werden speziellen Voraussetzungen und Lesestrategien erforderlich, die sich um den üblichen in den folgenden Punkten unterscheiden:

- Der Schüler muss Zugang zu speziellen mathematischen Bedeutungen der im Text vorkommenden Wörter und Sätze haben.
- Er muss die komplexeren grammatikalischen Strukturen mathematischer Texte verarbeiten können, insbesondere Einbettungs- und Unterordnungsstrukturen (z. B. *Sei M die Menge der positiven rationalen Zahlen, so gilt für Elemente aus M*...), komplexe Verknüpfungen (*... gilt dann und nur dann nicht, wenn*...), schwierige Wortverbindungen (z. B. *größter gemeinsamer Teiler* oder *kleinste obere Schranke*) und Auslassungsstrukturen (z. B. *es gibt ein* ... anstatt von *es gibt mindestens ein*... oder *kleiner-gleich* für *kleiner oder gleich*).
- Er muss die durch mathematische Sätze ausgedrückten Ideen erfassen können, und dies können besondere Ereignisse oder Tatsachen, eine räumliche oder zeitliche Beziehung, eine allgemeine Beziehung, eine Teilmengenbeziehung, eine implikative Beziehung oder ein Wechsel in einer oder mehreren Dimensionen sein.
- Er muss den Kontext der Aussagen auffassen und braucht dazu ein umfangreiches Wissen.
- Er muss mit der Dichte der Begriffe und der minimalen Redundanz zurecht kommen.
- An sein Kurzzeitgedächtnis werden hohe Anforderungen gestellt, damit er den Text in seiner sachlichen Struktur und grammatikalischen Komplexität erfassen kann.
- Er muss die spezielle Form der Prosa verarbeiten können, die sich beispielsweise von der einer Erzählung oder eines Berichts deutlich unterscheidet.

Auch diese Anforderungen können sich noch einmal beträchtlich verschärfen, sofern es sich um einen stark mit Symbolen durchsetzten oder gar ausschließlich in Symbolen geschriebenen mathematischen Text handelt.

Zu ähnlichen Ergebnissen wie GROEBEN kommt auch NEWMAN (1983), wenn sie eine umfassende Beschreibung all jener Fähigkeiten versucht, die ein Schüler speziell zum Verstehen mathematischer Texte braucht. Sie nennt als Erstes mechanische Lesefertigkeiten. Deren erste sei das Identifizieren von Wörtern und Symbolen, welches vor allem dann von großer Bedeutung ist, wenn im Text vorkommende Wörter im Unterricht nicht mit hinreichender Sorgfalt eingeführt wurden oder ihre Einführung schon weit zurückliegt. Im Einzelnen handelt es sich bei den Sprachelementen, die es zu identifizieren gilt, u. a.

- um funktionale Wörter (Konjunktionen, Verben, Artikel und Adverbien, usw.), die den Rahmen bilden, um den die spezifische mathematische Sprache gebaut ist,
- um spezifische Ausdrücke, die zur mathematischen Fachsprache gehören und oft auch in abgekürzter Form erscheinen sowie

– um Symbole wie die des Zahlsystems, Operationszeichen, geometrische Symbole und Platzhalter bzw. Variablen.

Eine zweite mechanische Lesefertigkeit verlangt von den Schülern, ihre Lesegeschwindigkeit den Erfordernissen mathematischer Texte anzupassen. Hier ist häufig ein sehr langsames Tempo bis hin zum Wort-für-Wort-Lesen nötig. Die dritte Fertigkeit betrifft die eventuell nötige Abweichung von der üblichen Leserichtung und die vierte die Wortanalyse dort, wo die mathematische Sprache von speziellen Vor- und Nachsilben Gebrauch macht. Dazu gehört die Fähigkeit, bestimmte Schlüsselwörter sowie syntaktische und semantische Muster zur Identifizierung des Kontext beizuziehen. Dies wird zwar häufig in mathematischen Texten durch einen umfangreichen Gebrauch von Symbolen erschwert und kann gelegentlich auch irreführend sein. Beispiel: Herr Müller entnimmt seinem Bankkonto 350 DM und es bleiben noch 648 DM zurück. Wie viel war ursprünglich auf dem Bankkonto? Hier darf der Schüler das Wort *entnehmen* nicht in die Subtraktion 648 – 350 übersetzen, sondern muss die verlangte Addition 648 + 350 erkennen.

Bedeutsamer als die mechanische Lesefertigkeiten schätzt NEWMAN die Verstehensfähigkeiten ein, mit deren Hilfe der Leser einzelnen Wörtern, Phrasen, Sätzen oder Texten, im Fall der Mathematik aber insbesondere auch einzelnen Symbolen oder Symbolsystemen Bedeutung zuzuschreiben vermag. Mathematische Sprache verstehen heißt, fähig sein, Wörter, Symbole und zeichnerische Elemente, die im mathematischen Text enthalten sind, zu interpretieren und in korrekte mathematische Handlungen bzw. Verfahren zu übersetzen. Die Autorin unterscheidet hier drei Niveaus:

– Das wörtliche Verstehen befähigt den Schüler, Anweisungen zu befolgen. Es muss sich ebenso auf Wörter der Alltagssprache wie auf Zahlen und mathematische Fachwörter erstrecken. Im Falle von Textaufgaben reicht es in der Regel aus, zu wissen, was in ihnen gegeben ist. In manchen Fällen gehört dazu auch die Fähigkeit, graphische oder schematische Darstellungen zu lesen.
– Auf dem Niveau des interpretativen Verstehens muss der Schüler über die implizite Bedeutung einer Frage oder Aufgabe nachdenken. Nun müssen vor allem fachspezifische Termini genau interpretiert werden, damit aus ihnen korrekte Handlungen abgeleitet werden können. Dabei gilt es zu beachten, dass in der Mathematik gleiche Begriffe oft mit verschiedenen Bezeichnungen belegt werden und umgekehrt die gleiche Bezeichnung für verschiedene Konzepte stehen kann. Die Interpretation von Symbolen erweist sich wegen ihrer oft großen Ähnlichkeit als schwierig. Es gilt die Gesamtbedeutung eines Textes interpretativ zu heben und evtl. Ergebnisse oder Lösungen vorauszusehen oder vorherzusagen. Nicht immer ist der zentrale Gedanke einer Aufgabe oder eines Textes in ihm wörtlich formuliert. Er muss auch in impliziter Darstellung gefunden werden und der Schüler muss fähig sein, irrelevante Informationen dabei außer Acht zu lassen. Auch beigegebene Graphiken oder Zeichnungen verstehen sich nicht von selbst, sondern bedürfen der Interpretation.
– Das evaluative Verstehen, mit dem die Bedeutung eines Textes festgestellt werden soll, wird eher auf höheren Stufen der mathematischen Bildung bedeutsam.
– Mit „Anwendungsfähigkeit“ meint die Autorin vor allem das Beiziehen von Lehrbüchern zum Verstehen von Texten sowie die Fähigkeit, sich selbst Notizen zu machen bzw. den Sinn eines Textes in eigener Sprache niederzuschreiben.

d) Empirische Untersuchungen zum Textverstehen

LERCH (1991) stellt eine Reihe empirischer Untersuchungen zum Verstehen von Texten vor. Eine seiner wesentlichen Theoriegrundlagen sind dabei semantische Netze als kognitive Strukturen der Wissensrepräsentation. Das sind zum einen die von *Schank & Abelson* (1977) definierten Skripts, d. h schematische Vorstellungen über Abfolgen von stets gleichartig verlaufenden Aktionen, beispielsweise das Lösen einer Fahrkarte am Schalter des Bahnhofs oder der Besuch einer Theateraufführung; zum anderen sind es die von vielen mit dem Denken befassten Psychologen zugrunde gelegten Schemata, mit dem sie in recht allgemeiner Form die Organisation menschlichen Wissens in Gestalt von Konzepten über Umweltobjekte, Situationszustände und -veränderungen beschreiben. Textverstehen deutet LERCH dann so, dass beim Lesen eines Textes im Leser von ihm gebildete Skripts bzw. Schemata aufgerufen werden, die die Verarbeitung neuer „Informationen" beeinflussen oder gar wesentlich steuern. Aufgrund von Experimenten mit Schülern (vor allem Gymnasiasten verschiedener Klassenstufen) konnte er folgendes zeigen:

- Beim Lösen einer lexikalischen Entscheidungsaufgabe, in der für eine Buchstabenfolge angegeben werden musste, ob sie ein sinnvolles Wort ergibt oder nicht, verringerte sich die Reaktionszeit der Versuchspersonen in allen jenen Fällen, in denen sie ein, in ihrem Wissen vorhandenes Skript aufrufen konnten, während sich ansonsten die Reaktionszeit nur durch häufige Wortwiederholung verkürzen ließ.
- Ein Text, dem eine zeitliche Struktur zugrunde lag, erschwerte die Informationsverarbeitung, wenn diese Ordnung mit der eines aufgerufenen Skripts konkurrierte.
- Beim Vergleich des Textverstehens von Schülern einer neunten und einer sechsten Jahrgangsstufe hatten erstere mehr Schemata verfügbar, diese waren besser strukturiert und konnten aufgrund von Hinweisreizen leichter aufgefunden werden. Beide Altersstufen erinnerten aber jene Informationen besser, die aufgrund von Übereinstimmungen mit verfügbaren Schemata als bedeutsamer eingeschätzt wurden.

Einen das Schemakonzept ergänzenden theoretischen Zugang zum Textverstehen stellen, LERCH zufolge, kognitive Strukturierungshilfen wie Heurismen dar, die als Hinweisreize auf Schemata im Leser Erwartungen wecken und die Aufmerksamkeit lenken können. Empirische Untersuchungen zu diesen Strukturierungshilfen machten folgendes deutlich:

- Schüler schätzen jene Textteile als wichtiger ein und behalten sie daher auch länger, die zu einem ihnen verfügbaren Heurismus passen. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Ziel-Heurismen (Was will der Handelnde?), Ursachen-Heurismen (Warum wird ein bestimmtes Ziel verfolgt?), Aktions-Heurismen (Mittels welcher Handlungen soll ein Ziel erreicht werden?), Hilfe-Heurismen (Wer oder was hilft bei der Zielrealisierung?), Hemmnis-Heurismen (Wer oder was hemmt die Zielerreichung?) und Folgen-Heurismen (Welche Wirkungen bringen das Ziel und die Handlungen hervor?).
- Ein Wissen über Zusammenhänge zwischen Handlungsquellen, Handlungszielen und Handlungsplänen (sog. source-goal-plan-units) beschleunigt das Wiedererkennen von Sätzen und fördert das Erinnern von Textteilen. Diese ermöglichen nämlich Vorhersagen über das Verhalten von Personen, die das gleiche Ziel verfolgen, können über mögliche Ziele von Personen mit gleicher sozialer Rolle informieren und erlauben Schlüsse von beobachteten Handlungen auf Ziele und Beweggründe.
- Ein soziales Regelwissen, insbesondere ein solches über Zielhierarchien im menschlichen Handeln (sog. belief-expectancy-rules) verbessert das Behalten von Textteilen, erhöht die Verstehbarkeit von Texten und beeinflusst insgesamt den Verstehens- und Behaltensprozess maßgeblich.

Als weiteren theoretischen Bezugspunkt für das Textverständnis verwendet LERCH die „Repräsentationsmodalität", in welcher eine neue textliche Information verschlüsselt wird. Er verweist dabei auf KLIX (1971) der zwei Arten von Kodierungsprozessen unterscheidet: solche Kodierungen, bei denen die Bedeutung von Begriffen dadurch gegeben ist, dass sie auf etwas außerhalb der Sprache Existierendes verweisen und ein Bezug zu anderen Begriffen oder Begriffsstrukturen hergestellt wird, und die verbale Repräsentation, bei welcher der Inhalt von Begriffen durch bloße Benennung, d. h. ausschließlich durch sprachliche Vermittlung erkennbar wird. Untersuchungen zeigen, dass die begriffliche Kodierung, vor allem aufgrund bildlicher Vorstellungen und semantischer Merkmalszuschreibungen, bezüglich der Behaltensleistung beim Rezitieren von Texten der bloß verbalen Repräsentation überlegen ist. Dies gilt, im Fall von Texten mit abwechselnd konkreten und abstrakten Sätzen, sogar für die abstrakten Sätze selbst, wenn die Leser vorweg zu bildlicher Vorstellung angeleitet werden.

Eng mit den Kodierungsmodalitäten verflochten sind affektive Prozesse. Auch sie beeinflussen das Textverständnis und die Behaltensleistung. Beispiele solcher affektiver Prozesse sind „Ich-bin-Beteiligung" und „Normverstöße". Die Erinnerungsleistung ist demnach größer im Fall von Texten, die über die eigene Bedürfnislage, über bedürfnisrelevante äußere Umstände oder Fähigkeiten zur Veränderung der Person-Umwelt-Beziehung in

Richtung eigener Ziele berichtet wird. Gleiches gilt für Texte, deren Inhalte gegen Erwartungen des Lesers aufgrund seines bisherigen Weltwissens über normengerechtes Verhalten verstoßen. Berichte über Normverstöße entwickeln affektiv dynamischen Charakter und beeinflussen so das Behalten assoziativer Textinhalte positiv.

Was bedeuten nun die von LERCH zusammengestellten Theorien und Befunde für das Verstehen von Lehrtexten, denen die Schüler beim Mathematiklernen begegnen? Es ist ja zu bedenken, dass bei den erwähnten Untersuchungen weitgehend literarische Texte verwendet wurden: Erzählungen, Berichte aus dem Alltagsleben, Anekdoten, Erinnerungen, u. ä. Bei solchen Texten scheint es weit wahrscheinlicher als bei mathematischen, dass Schüler über Skripts, Schemata und Heurismen verfügen, die ihnen das Verständnis erleichtern und ihre Behaltensleistung steigern können. Bei letzteren geht es um von Beziehungen und Strukturen, bei denen die Schüler nur selten an Alltagserfahrungen anknüpfen können; solche müssten ihnen in Form mathematischer Begriffe bereits verfügbar sein. Aus alltagsweltlicher Erfahrung gewonnene Skripts, Schemata und Heurismen zu den dargestellten Sachverhalten können das Auffinden der mathematischen Bedeutungen, Beziehungen und Strukturen u. U. eher stören als fördern. Was positive Affekte aufgrund von Ich-Betroffenheit und Überraschung durch Normabweichungen angeht, dürften sie für den Fall mathematischer Texte nur in seltenen Fällen Bedeutung erlangen. Aus all diesen Gründen darf man wohl für das Verständnis mathematischer Texte eher größere Schwierigkeiten erwarten als im Fall literarischer Texte.

Anhang 5: Sprache und Denken

Dem Denken wird bei jeder Art mathematischen Tuns ein hoher Stellenwert eingeräumt; und das Lösen mathematischer Probleme wird in besonderer Weise als eine Denkleistung angesehen. Fragt man dann nach der Rolle, welche die Sprache in diesem Prozess zu spielen hat, so gerät man mitten in das Problem der Beziehung zwischen Denken und Sprache. Es wurde schon in der griechischen Philosophie erörtert, in den 70er Jahren unseres Jahrhunderts besonders intensiv diskutiert und erlangte durch die epistemologische Auseinandersetzung des sog. Konstruktivismus mit dem Realismus neue Aktualität. Von den zahllosen philosophisch inspirierten Werken über dieses Thema soll FLORENSKI (1993)[2] hervorgehoben werden, in welchem ein gewaltiger Bogen von Sprachwissenschaft, Wissenschaftstheorie und Philosophie bis zu Theologie und Mystik gespannt wird. Es ist hier auch ein Thema zu nennen, welches die europäische Kultur durch Jahrhunderte durchzieht: Gibt es eine „vollkommene“ Sprache? Gemeint ist damit eine Sprache, die das Denken in vollendeter Weise beschreiben kann (und auch neue Zusammenhänge erschließen kann) oder die in einem noch zu beschreibenden Sinn „universal“ ist oder die sich durch ihre Verwendbarkeit auszeichnet (wie etwa eine leicht zu erlernende „internationale“ Sprache oder ein System, welches gestattet, jede beliebige Sprache bequem zu dechiffrieren). Eine gute Übersicht über dieses faszinierende Kapitel der Ideengeschichte, zu der auch *Leibniz* mit seiner Schrift *Lingua Generalis* beigetragen hat, gibt ECO (1994).

Zur Frage der Beziehung zwischen Denken und Sprechen wurden verschiedene Positionen herausgearbeitet, die nachfolgend kurz skizziert werden sollen.

a) Monismus - Dualismus - Interdependenztheorie

Zum einen wurde die Frage erörtert, ob es sich bei Sprache und Denken um zwei eigenständige kognitive Fähigkeiten des Menschen handelt oder ob zwischen beiden ein wie immer gearteter Zusammenhang besteht. Bezüglich der Antwort lassen sich drei Positionen unterscheiden: eine monistische, eine dualistische und eine interdependistische (siehe z.B. RÉVÉZS 1954 und RIEDER 1977).

Die schon aus der Antike übernommene, später etwa von *Herder* und *W. Humboldt* vertretene monistische Auffassung identifiziert bzw. verschmilzt Wort und Gedanke. Sie geht davon aus, dass der Gedanke des Wortes bedarf, um als solcher überhaupt existieren zu können. Sprache und Denken bilden eine unauflösliche Einheit. Sie seien verschiedene Formen ein und derselben Grundfunktion. Das Denken stellt die innere, die Sprache die äußere Seite der Geistigkeit dar. So sind für WITTGENSTEIN (1973) die Grenzen der Sprache des Menschen zugleich auch die Grenzen seiner Welt. "Was wir nicht sagen können, das können wir nicht denken" (S. 56). Die monistische Position ist auch unter Mathematikern verbreitet.

Dem dualistischen Standpunkt zufolge sind Sprache und Denken zwei je besondere, voneinander unterschiedene Formen kognitiver Fähigkeiten, die auch von verschiedenen Funktionen des Gehirns herrühren. Seine Vertreter (etwa BÜHLER 1965) verkennen zwar nicht eine gewisse wechselseitige Beeinflussung von Sprache und Denken, sprechen aber gleichwohl von prinzipiell voneinander verschiedenen geistige Tätigkeiten. Die Sprache sei nicht das Denken selbst. Denken sei auch kein innerliches Sprechen. Vielmehr können Gedanken ohne Sprache gefasst werden; ja der Existenz nonverbaler Denkvorgänge komme sogar erhebliche Bedeutung zu. Umgekehrt müsse wohl die Verwendung bestimmter Sprachmuster noch kein zwingender Hinweis auf die Fähigkeit zu bestimmten geistigen Leistungen sein. LOVELL (1964) meint, dass die Sprache zur Heranbildung und Stabilisierung des auf Begriffe gegründeten Kommunikationssystems beitrage. Sie scheint ihm jedoch keine hinreichende Bedingung für die Entstehung der Operationen zu sein, die den eigentlichen Kern des systematischen Denkens ausmachen. Verbale Äußerungen von Gedanken seien noch keine Garantie dafür, dass der Sprecher die zugrunde gelegten Ideen in sein kognitives System integriert hat. Insgesamt erschöpften sich die Formen des Denkens weder in den Formen des Sprechens noch umgekehrt.

[2] FLORENSKI wurde 1943 in Sibirien hingerichtet.

Auch unter Mathematikern gibt es Anhänger einer solchen Auffassung. So ist z. B. VAN DER WAERDEN (1954b) der Meinung: "Denken ohne Sprache ist möglich, nicht nur praktisches, technisches und geometrisches Denken, sondern auch die höchsten Stufen des abstrakten Denkens" (S. 171). Die Sprache erleichtere zwar das Denken und sei demnach eine praktische Erfindung wie die Töpferkunst. Zum anderen werde durch sie das Denken zu einer kollektiven Tätigkeit, so dass sie die Grundlage für Kommunikation und damit auch für wissenschaftliches Arbeiten liefert. Daher gelte: "Ohne Sprache ist individuelles Denken sehr wohl möglich, Wissenschaft aber nicht." (S. 172). An anderer Stelle meint VAN DER WAERDEN: "Wir haben jetzt eine klare Trennung zwischen angeborenen und erlernten Eigenschaften des Menschen: Das Denken ist angeboren, das Sprechen haben wir gelernt. Das gilt für den Einzelnen wie für die gesamte Menschheit" (ebd.).

Als vermittelnde Position zu diesem Problem wurden, neben den beiden bisher genannten, auch Theorien und Modelle entwickelt, die - ohne der Sprache und dem Denken eine gewisse eigenständige Prägung abzusprechen - eine starke innere Verflechtung und wechselseitige Beeinflussung beider unterstellen. Ein typischer Vertreter dieses sog. interdependistischen Standpunkts ist RÉVÉSZ (1954). Er expliziert eine "dualistische Einheitslehre", deren Argumentation sich etwa wie folgt zusammenfassen lässt: Zwar weist die ontogenetische Entwicklung nicht unmittelbar auf eine enge wechselseitige Beziehung zwischen Sprache und Denken hin; vielmehr sind beide funktionell, intentional und strukturell autonom. Die Funktion der Sprache besteht in symbolischer Repräsentanz der Tatbestände der äußeren und inneren Welt (symbolische Funktion), die des Denkens in der kategorialen Erfassung der Dinge und der Beziehungen zwischen ihnen (logische Funktion). Von der Intention her zielt das Denken auf die Erkenntnis des Seins (persönliche Bedeutung), die Sprache auf gegenseitige Verständigung (soziale Bedeutung). Struktur und Gesetze der Sprache sind linguistischer Natur, die des Denkens logischer bzw. psychologischer Natur. Andererseits jedoch ist die Annahme eines "denkfreien Sprechens" bzw. eines "sprachfreien Denkens" unhaltbar. Das Denken ist prinzipiell und unzertrennlich an die Sprache gebunden und umgekehrt. Beide sind existenziell und inhaltlich voneinander abhängig. Insbesondere setzen alle Arten des Denkens die Sprache bzw. sprachlich festgelegte Erfahrungen voraus. "Denken und Sprechen bilden eine unzertrennliche Dualität mit mannigfaltigen Beziehungen" (S. 46).

b) Art der Interdependenz von Sprache und Denken

Schließt man sich aus gebotener Vorsicht bezüglich des Verhältnisses von Sprache und Denken der zwischen Monismus und Dualismus vermittelnden interdependistischen Position an, so bleibt die Frage nach der Art der zwischen beiden bestehenden Beziehung offen. Sie wurden vor allem unter dem Gesichtspunkt erörtert, wem von beiden die Priorität zukomme. Bis zu Aristoteles kann die Auffassung zurückverfolgt werden, dass das Denken der Sprache vorausgehe. Es ist den Sprachen eigen, dass sich mit ihrer Hilfe alle Gedanken auszudrücken lassen, die Menschen haben können. Diese traditionelle Position blieb durch die Jahrhunderte wach, obgleich sie auch immer wieder heftig in Frage gestellt wurde.

PIAGET (1972) zufolge durchläuft das kindliche Denken in seiner Entwicklung verschiedene Stufen, in denen es durch unterschiedliche Merkmale gekennzeichnet ist. Innerhalb jeder einzelnen Stufe wird es zwar geläutert und geklärt, indem es sich in Sprache ausdrückt. Aber die Entwicklung wird durch die Art und Weise vorangetrieben, wie das Kind denkt, nicht dadurch, wie es spricht. Erst wenn sein Denken eine neue Entwicklungsstufe erreicht hat, wird ein Kind in der Lage sein, entsprechende Gedanken sprachlich zu äußern. Das Kind kann nur das sprachlich ausdrücken, was es vor allem aufgrund von Erfahrungen zu denken in der Lage ist. Demnach ist die Sprachentwicklung ein Produkt der geistigen Entwicklung, die in der großen Linie vom außersprachlichen Denken über die egozentrische Sprache zur sozialisierten Sprache verläuft. "Die Funktion dieser egozentrischen Sprache ist also hauptsächlich die, das individuelle Denken oder die individuelle Handlung zu interpretieren." (S. 206).

Gleichwohl ist für PIAGET die Sprache, wenn schon keine hinreichende, so doch eine notwendige Bedingung für den Aufbau logischer Operationen. Sie ist notwendig, weil ohne ein System symbolischer Ausdrucksmittel, wie es die Sprache darstellt, die Denkoperationen auf dem Stadium von Handlungsabfolgen verbleiben müssten, ohne je in ein System simultaner Transformationen integriert zu werden. Ohne Sprache würden die Operationen an einzelne Personen gebunden bleiben und nicht durch interpersonalen Austausch und durch Zusammenwirken mit anderen Personen reguliert werden. In gewisser Weise sind Sprache und Denken in einer Art genetischem Zirkel miteinander verflochten, wo sich eines notwendig auf das andere stützt, und sich so beide in Wechselwirkung ausformen.

Im Gegensatz zu PIAGET ist für WYGOTSKI (1974) die Sprache ein bedingender Faktor für die Entwicklung des Denkens. Dabei interessiert er sich besonders für die Funktion der sogenannten inneren Sprache. "Wie die Frage nach dem Zusammenhang von Sprache und Denken auch gelöst werden mag, die innere Sprache ist dabei von großer Bedeutung" (S. 91). WYGOTSKI zufolge findet eine Entwicklung von der äußeren, sozialen Sprache über die egozentrische zur inneren Sprache statt:

> "Übergangsstadium von äußerer zur inneren Sprache ist die egozentrische Kindessprache. Sie begleitet die kindliche Tätigkeit und wird leicht zum Denken im eigentlichen Sinne des Wortes, indem sie die Funktion einer planenden Operation ... übernimmt. Die Sprache wird zur inneren Sprache, weil sich ihre Funktion wandelt." (81 ff).

Verkürzt kann man die beiden gegensätzlichen Positionen so charakterisieren: Bei PIAGET ist die Sprache ein Ausfluss des in der geistigen Entwicklung wie im aktuellen Ablauf vorgeordneten Denkens; bei WYGOTSKI entfaltet sich das Denken, indem das Symbolsystem Sprache mit Erfahrungs- und Vorstellungsgehalt aufgefüllt wird. Und: "Bei Piaget verläuft die Entwicklung der Sprache vom individuellen zum sozialisierten, bei Wygotski hingegen vom sozialen zum individuellen." (RIEDER 1977, S. 79).

Von psychologischer Seite wurde auch versucht, die Frage der Beziehung von Sprache und Denken in der kindlichen Entwicklung empirisch zu untersuchen. So meinte *Lurija* (in: HIEBSCH 1969) mittels des Vergleichs von Paaren eineiiger Zwillinge nachweisen zu können, dass das Niveaus der Denkprozesse von dem Ausmaß abhängt, in dem das Individuum über eine ausgebaute Sprache mit realitätsadäquaten Begriffen verfügt. Seiner Ansicht nach werden daher die für Wahrnehmen und Denken erforderlichen Beziehungselemente durch die Sprache vermittelt. Eine solche Auffassung wird bestärkt von Untersuchungsergebnissen, denen zufolge bei Sprachstörungen das Denken leidet und umgekehrt. *Kostjuk*:

> "Das zeugt davon, dass Sprache und Denken Erscheinungen der einheitlichen analytisch-synthetischen Tätigkeit des menschlichen Gehirns sind, dem die Wechselwirkung der zwei Signalsysteme zugrunde liegt" (in: HIEBSCH 1969, S. 295).

Aufgrund entwicklungspsychologischer Untersuchungen zur Beziehung von Sprache und Denken bei Kindern geht LEWIS (1970) davon aus, dass es von früher Kindheit an einen engen wechselseitigen Zusammenhang zwischen Sprache und Denken gibt. Die Sprache hilft dem Kind, die Vielfalt seiner Wahrnehmung in Begriffen zu verdichten. Schon für ein 18 Monate altes Kind kann das Wort "Mama" ein Symbol sein, in dem es verschiedenste Erfahrungen mit einer Person, verschiedenste ihrer Erscheinungs- und Verhaltensweisen in einer Art Identifikation zusammenfasst. Einen wichtigen Faktor stellt dabei offensichtlich auch die Übernahme sprachlicher Muster der Erwachsenen dar. LEWIS meint:

> "Im Verlauf der Zeit führt die Übernahme der üblichen Ausdrücke statt der eigenen primitiven Lautmuster das Kind letzten Endes zur Erkenntnis, dass Wörter die Namen von Gegenständen sein können. Dies ist sicherlich ein mächtiger Faktor in seiner kognitiven Entwicklung und hilft ihm mehr und mehr, zum abstrakten Denken zu gelangen, das in der es umgebenden Gesellschaft geläufig ist" (S. 75).

Je mehr das Kind versucht, räumliche, zeitliche und ursächliche Zusammenhänge abstrakt zu erfassen und nutzbar zu machen, wird die Sprache als Mittel immer unerlässlicher. Besonders offensichtlich ist dies nach LEWIS für die Beschäftigung mit kausalen Beziehungen. Während dem Kind ein erstes Bewusstsein von Grund und Folge bei der Durchführung einer aktuellen Aufgabe aufgehen mag, kann es kaum Fortschritte machen, um neuen Situationen zu begegnen, bevor es kausale Beziehungen symbolisieren und so in sein Gedächtnis einbringen kann.

> „Dieses Symbolisieren kann auch hier wieder nichtverbal sein. Das Kind kann z. B. ein Bild von Ereignissen im Bewusstsein tragen, die im Verhältnis von Ursache und Wirkung zueinander stehen. Aber ein Bild dieser Art ist wahrscheinlich zu beschränkt, zu eng verknüpft mit speziellen Begebenheiten, um beim ‘geistigen Experiment’ – Piagets ‘psychologischen Operationen’ – von Nutzen zu sein. Nichts kann dem Kind so große Hilfe bringen wie die Sprache, um es von der Fessel spezieller Fälle zu befreien und es zu befähigen, neue Kombinationen von Beziehungen zu erforschen" (LEWIS 1970, S. 170).

Viele Psychologen kommen zu dem Ergebnis, dass die Bedeutung der Sprache für das Denken mit wachsendem Alter zunimmt. Auf der Stufe des konkreten Denkens (späte Kindheit, Grundschuljahre) nehmen die Kinder beim Lösen von Problemen, wie *Lurija* sagt, die "abstrahierende, generalisierende und synthetisierende Funktion der Sprache in Anspruch." Nach *Osgood* kann inneres Sprechen als vermittelnder Prozess wirken, um eine Situation zu bewältigen, auch wenn das Kind darüber nicht laut sprechen kann (siehe LEWIS 1970, S. 241). *Churchill* zufolge lösen Kinder, mit denen 3 Monate beim Gruppieren, Ordnen und Vergleichen gesprochen wurde, anschließend entsprechende Aufgaben deutlich besser als vergleichbare andere Kinder. Auch *Hood* kommt im Zusammenhang mit den Piaget-Versuchen zu der Überzeugung, dass Worte den Prozess der Verinnerlichung von Handlungen beschleunigen (siehe LEWIS 1970, S. 245 f). Den Kindern hilft aber beim Lösen von Aufgaben offenbar nicht nur die Möglichkeit eigener sprachlicher Kommunikation. In begrenztem Maße können sie auch dann leichter vorankommen, wenn ihnen Erwachsene Bezeichnungen vorgeben und geeignete Regeln und Prinzipien mitteilen.

Im einzelnen wirkt (nach LEWIS) die Sprache im Stadium des konkreten Denkens bei der Lösung folgender Aufgaben mit:

- beim Erkennen von Gegenständen und deren Merkmalen; hierbei kommt vor allem dem Benennen und Bezeichnen eine wichtige Funktion zu;
- beim eindimensionalen Klassifizieren; hier scheint der Sprache eine ordnende Funktion zuzukommen;
- beim zweidimensionalen Klassifizieren;
- beim Ordnen von Reihen; hier können den Kindern Namen und Bezeichnungen offenbar um so mehr helfen, je abstrakter die gestellte Seriationsaufgabe ist;
- beim Erinnern an frühere Situationen und Planen von Abstraktionsverläufen.

Sprachliche Förderung kann spontane kognitive Leistungen anregen, die das jeweilige Entwicklungsniveau eines Kindes übertreffen, und sie kann auch zu einer anhaltenden Steigerung der Denkfähigkeit führen. Freilich muss Sprache weder der primäre noch der einzige Zugang zur Beeinflussung geistiger Funktionen sein. Umgekehrt drückt sich wachsendes Denkvermögen in der Regel in einer qualitativen Differenzierung der Sprache aus. Doch auch hieraus braucht nicht gefolgert zu werden, dass die Sprachentwicklung eine bloße Funktion der Denkentwicklung sei. Vielmehr gibt es, wie die empirischen Befunde zeigen, im inter- wie im intrasubjektiven Vergleich Retardierungen und Akzelerationen.

c) Denken und Sprachgemeinschaft

Die der traditionellen Vorstellung von der Priorität des Denkens gegenüber der Sprache am schärfsten widersprechende These besagt, die Sprache sei dem Denken logisch vorgeordnet, und das, was ein Mensch zu denken in der Lage ist, sei bestimmt durch die Sprache, die er spricht. Diese These wurde im 18. Jahrhundert vor allem von *Herder*, im 19. Jahrhundert von *Humboldt* vertreten. Ihre deutlichste Ausprägung erfuhr sie im 20. Jahrhundert durch die Linguisten *Sapir* und WHORF (1963). WHORF war überzeugt, dass Sprecher verschiedener Sprachen im Allgemeinen wie in speziellen Situationen verschieden denken; sein bekanntestes Beispiel sind die vielen Wörter, die Eskimos für verschiedene Arten von Schnee haben. In seiner strengen Form liegt dem von ihm vertretenen linguistische Determinismus die These zugrunde, dass das menschliche Denken durch die Sprache festgelegt, also stark von der Sprachgemeinschaft, in der er lebt, geformt und geprägt sei. Man spricht von der Sapir-Whorf-Hypothese (siehe auch BOLINGER & SEARS 1981 und ZIMMER 1995).

Gemäß einer Diskussion durch *Bourne u. a.* (ref. nach KLAUSMEIER & GHATALA & FRAYER 1974) muss man diese Theorie in vier Teilprobleme zerlegen und die Frage untersuchen,

- ob Unterschiede im Wortschatz verschiedener Sprachen Unterschiede im Weltbild der sie sprechenden Menschen verursachen (es könnte ja auch umgekehrt der Wortschatz mehr durch den kulturellen Erfahrungsschatz der Sprachgruppe beeinflusst sein),
- ob der Wortschatz das nonverbale Verhalten beeinflusst, wofür es einige empirische Belege gibt (doch können auch hier die Unterschiede im Verhalten zunächst teilweise aus unterschiedlichen Kultur- und Umwelterfahrungen resultieren),
- ob die linguistische Struktur einer Sprache die Wahrnehmung der Realität oder das Weltbild des Sprechers determiniert (dieser Teil der Hypothese ist weniger evident und erscheint manchen Autoren gar als Zirkelschluss) und
- ob die linguistische Struktur einer Sprache das nonverbale Verhalten beeinflusst (hier gilt entsprechendes wie im zweiten Fall).

Es wurde mehrfach versucht, die Sapir-Whorf-Hypothese empirisch zu prüfen. Einige Untersuchungen schienen sie zu bestätigen. ZIMMER (1995) referiert Befunde, die zeigen, dass der prototypische Aufbau von Begriffen[3] weltweit ähnlichen Gesetzen zu gehorchen scheint. Auch wurde gezeigt, dass Testaufgaben, welche die Verwendung von Farben verlangten, für jene Farben besser gelöst wurden, für die es in der Sprache der Versuchspersonen geeignete Bezeichnungen gab. Andererseits erkannten bei Experimenten mit geometrischen Formen Versuchspersonen aus dem Volk der Dani Kreise, Quadrate und gleichseitige Dreiecke besser von Verzerrungen dieser Formen unterscheiden, obwohl es in ihrer Sprache keine Bezeichnungen für diese Formen gibt (siehe GARNHAM & OAKHILL 1994, S. 51f). Insgesamt lassen sich eher wenige Belege finden, die einen strengen Determinismus unterstützen würden. Eine abgeschwächte Form dieser Theorie würde nur besagen, dass bestimmte Sprachen manche Formen des Denkens unterstützen bzw. erleichtern. Sie erscheint zwar eher kohärent, ist aber auch nicht leicht beweisbar, weil offenbar linguistische und kulturelle Unterschiede so eng miteinander verflochten sind, dass sie sich kaum voneinander trennen und in quasikausalem Sinn aufeinander beziehen lassen.

Gleichwohl darf man wohl unterstellen, dass jede Sprache, da sie durch Jahrhunderte in einem soziokulturellem Kontext geformt wurde, das Denken ihrer Sprecher prägt. Die Bedeutungen von franz. *esprit* oder engl. *gentleman* sind im Deutschen kaum adäquat durch ein Wort wiederzugeben; umgekehrt kann auch die Bedeutung von *Gemütlichkeit* oder *Heimat* nur schwer in andere Sprachen übersetzt werden (dazu etwa WANDRUSZKA 1981). Diese 'semantischen Lücken' geben oft auch Anlass zu Entlehnungen. Dies ist bei konkreten Benennungen nicht so auffällig, wie zum Beispiel bei *Känguruh* (entlehnt aus der australischen Sprache Guugu Yimidhirr als Bezeichnung für eine Klasse von Beuteltieren), geschieht aber auch bei abstrakten Begriffen, etwa *tabu* '(aus religiösen Motiven) verboten' aus dem pazifischen Raum (das Wort lautet *tapu* auf Tonga, Samoa und Rarotonga, aber *kapu* im Hawaiianischen).

Für unsere Überlegungen ist vor allem die Frage von Interesse, ob unsere heutige Wissenschaft anders aussehen würde, wenn sie nicht ein Produkt der europäisch geprägten Kultur wäre, deren Sprachen überwiegend indoeuropäisch sind? Es wurde schon gezeigt (siehe Abschnitt Mathematik in verschiedenen Sprachen), dass diese Annahme zumindest für die Mathematik eher abgelehnt wird. Das mathematische Fachwort *Menge* hat zwar eine andere Konnotation als das engl. *set* oder ital. *insieme.* Dennoch lassen sich mathematische Texte von einer Sprache in eine andere Sprache übersetzen, und es ist auf diesem Feld eine Verständigung zwischen Menschen

[3] Es werden oft zwei Weisen der Begriffsbildung angenommen: die aristotelische Begriffsbildung, die Begriffe als Klassen merkmalbehafteter Objekte formt, und die prototypische Begriffsbildung (siehe Abschnitt Zur Semantik im ersten Kapitel).

verschiedener Sprachen sehr gut möglich. Andererseits dürfte die syntaktische Organisation einer Sprache (vor allem die Wortstellung) einen gewissen Einfluss auf das Lernen von Mathematik haben. Die guten Schulleistungen in China, Japan und Korea werden zum Teil auf den stärker systematischen Aufbau der Zahlwortreihe oder Wendungen wie 'Viertel, davon drei' (Nenner vor Zähler!) für *drei Viertel* zurückgeführt (dazu etwa BELL & HEE-CHAN 1996, TOWSE & SAXTON 1997).

d) Konstruktivismus versus Realismus

Eine interessante Perspektive auf das Thema Denken und Sprache eröffnet auch die im Bereich der Mathematikdidaktik stark rezipierte interaktionistisch-konstruktivistische Auffassung zum Wissenserwerb. Danach vermögen die Äußerungen eines Sprechers bzw. die Aussagen eines Texts nicht eine, vom Realismus angenommene, objektiv bestehende Wirklichkeit abzubilden. Vielmehr können sie für den Hörer bzw. Leser nicht mehr sein als Hinweise auf einen von ihm konstruierten Sachverhalt sein und lediglich dessen Aufmerksamkeit auf diesen Sachverhalt lenken. Was mit dieser Äußerung oder diesem Text tatsächlich gemeint ist, ist dann wieder ausschließlich eine autonome (idiosynkratische) Konstruktion des Hörers bzw. Lesers, der für sich die nötigen Bezüge herstellt. Die Sprache hat keinen direkten Zugriff auf sein Denken und sein Wissen. Und es gibt es letztlich keine Wirklichkeit und kein Wissen außerhalb der vom Individuum konstruierten Wirklichkeit (siehe GLASERSFELD 1987)

Allerdings sind die Interpretationen des Hörers bzw. Lesers nicht rein zufällig oder willkürlich. Vielmehr sind sie geprägt von zahlreichen Erfahrungen, die sich in vorausgehenden Interaktionen ausgebildet haben. In diesen Interaktionen hat er versucht, sich durch Ausbildung 'viabler', d. h. 'überlebensfähiger' Deutungen der ihn umgebenden Kultur anzupassen und erfolgreich in ihr zu handeln. BAUERSFELD (1995) kann dann sagen:

> „What we call understanding appears from this perspective as the active construction of such meanings and references supported by the social interaction within the culture" (S. 274). Und: „Only across social interaction and permanent negotiations of meaning can 'consensual domains' emerge, so that these 'learned orienting interactions' can lead an observer to the illusion of some transport of meaning or information among the members of the social group" (S. 275).

Freilich bleibt auch richtig, dass die Prozesse der Aufmerksamkeitsfokussierung und der Auswahl sowie der Deutung des sprachlich Wahrgenommenen stark individuelle Züge trägt, weil er von der Lerngeschichte, der spezifischen Situation und persönlichen Denk- und Wissensschemata geprägt ist. Diese Auffassung trifft sich mit linguistischen Positionen, die mit der aristotelischen Sicht der Sprache als einer dritten eigenständigen zwischen Subjekt und Objekt vermittelnden Wirklichkeit bricht und der zufolge die Sprache weder die Welt repliziert oder abbildet. BAUERSFELD (1995):

> „Rorty (1989), Davidson (1990), and others (Bruner, 1990; Roth, 1992) built their alternative views on the late Wittgenstein (1974). We make realities treatable in our mind mainly through languaging, and we have and communicate about realities through language games. Particularly, the reflection on language itself is possible only within specific language games, played namely in linguistics" (S. 277).

Aber er zitiert auch *Fischer* (in eigener Übersetzung):

> „The logic or grammar of the signifying language game is not the logic of the signified per se. The logic of signification constitutes the logic of the signified: The pretended logic of the world is the shadow of the grammar thrown onto the world." (S. 85)